

引用格式: 孙笑云, 吴树范, 沈强. 基于LMI的输出跟踪自适应鲁棒无拖曳控制[J]. 航空学报, 2023, 44(S1): 727654. SUN X Y, WU S F, SHEN Q. LMI-based output tracking robust drag-free control with model reference adaptive scheme[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2023, 44(S1): 727654 (in Chinese). doi: 10.7527/S1000-6893.2022.27654

基于LMI的输出跟踪自适应鲁棒无拖曳控制

孙笑云^{1,2}, 吴树范^{1,2,*}, 沈强^{1,2}

1. 上海交通大学 航空航天学院, 上海 200240
2. 上海市引力波探测前沿科学研究基地, 上海 200240

摘要: 针对空间引力波探测航天器平台稳定姿态控制问题,提出一种改进的多变量模型参考自适应控制(MRAC)方案,应用于探测航天器平台无拖曳控制回路中,实现控制系统闭环鲁棒性的提升,抑制与系统输入相匹配的有界附加干扰和参数不确定性。考虑系统状态不易直接获得,MRAC方案的设计基于输出反馈和输出调节;为提高闭环系统鲁棒性,设计自适应修正项,该修正项的得出基于通过稳定性分析构造的线性矩阵不等式组(LMIs)的解。基于Lyapunov方法的稳定性分析验证了各信号的闭环稳定性,数值仿真验证了无拖曳自由度在面临非线性不确定性和附加干扰时的良好鲁棒性。

关键词: 输出跟踪; 鲁棒控制; 模型参考自适应控制; 无拖曳控制; 空间引力波探测

中图分类号: V448.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-6893(2023)S1-727654-11

在空间引力波探测任务中,为确保低频引力波信号的成功探测,探测航天器需要具备较强的鲁棒性^[1-3]。探测航天器内部存在2个用于探测引力波信号的检验质量TM1和TM2,无拖曳控制则用于实现航天器自身和2个检验质量3个物理实体的超高精度相对运动^[4-5]。无拖曳控制系统以检验质量作为关键载荷,为航天器在轨运动提供惯性基准^[6],使探测航天器获得精确跟踪检验质量运动的能力^[7-8]。

以空间低频引力波探测任务为例,在 10^{-3} Hz频段,要求航天器惯性传感器的敏感轴残余扰动加速度优于 $10^{-15} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} / \sqrt{\text{Hz}}$ 量级、航天器位移控制精度优于 $1 \text{ nm} / \sqrt{\text{Hz}}$ 量级,这是下一步空间引力波探测工程实施的重要技术支

撑^[8-9]。考虑到近地卫星会受到复杂的外部及内部干扰等,为满足这些性能指标,需优化航天器平台控制方法的设计及控制技术的实现,这是一项极具挑战性的工作^[10]。

当前,针对扰动抑制和提高稳定性需求的无拖曳控制方法研究主要包括线性控制方法^[11-12]和非线性控制方法^[13]。在非线性的控制方法中,系统不确定性或复杂干扰往往利用控制器本身的非线性逼近能力进行估计和反馈抑制,例如自适应控制方法^[14-16]、可重构控制方法^[17]等;线性控制方法则针对近似的小扰动线性化动力学,根据性能指标或控制需求设计控制器,从而提高系统鲁棒性。例如文献[11]基于定量反馈理论,通过将性能指标转换成设计准则,在已解耦的无拖曳控制系统中设计控制器以满足不同的性能规范。

收稿日期: 2022-06-01; 退修日期: 2022-06-20; 录用日期: 2022-07-23; 网络出版时间: 2022-07-27 09:03

网络出版地址: <https://hkxb.buaa.edu.cn/CN/Y2023/V44/IS1/727654>

基金项目: 国家重点研发计划(2020YFC2200800, 2021YFC2202600); 国家自然科学基金青年科学基金(62103275); 上海市自然科学基金面上项目(20ZR1427000)

* 通信作者. E-mail: shufan.wu@situ.edu.cn

文献[12]提出一种基于频率分离策略的 H_∞ 混合灵敏度控制方案,在具有科学测量约束的无拖曳卫星中满足稳定控制需求,实现了全频段控制消耗的降低。

为提高系统鲁棒性,同时实现非线性附加干扰抑制和精确跟踪目标,以空间引力波探测航天器为研究对象,设计一种基于线性矩阵不等式组(Linear Matrix Inequalities, LMIs)解^[18-19]的自适应控制综合方案,利用基于输出调节的多变量模型参考自适应控制(Model Reference Adaptive Control, MRAC)方法^[20],使各敏感轴输出响应自适应逼近参考输出指令,提高了系统应对系统参数不确定性和非线性扰动的稳定控制能力;将线性控制方案与非线性自适应控制方案结合,构造的LMIs基于线性参考模型和Lyapunov分析,在受扰近似线性系统中运用LMIs配置Lyapunov函数使各闭环信号全局一致渐进稳定,在非线形动力学系统中提高了控制器对有界输入干扰的鲁棒性。

本文内容安排如下:第1节问题描述,给出包含6个敏感轴自由度的无拖曳航天器非线性模型建立过程,并设计控制器结构;第2节设计基于LMIs的输出调节多变量MRAC控制器,利用Lyapunov方法验证系统存在有界输入干扰时,其闭环信号的收敛性;第3节给出改进的MRAC方案与传统 H_∞ 鲁棒控制方案、标准MRAC方案对敏感轴各状态响应的数值仿真结果;第4节给出结论。

1 问题描述

对无拖曳控制系统进行多体动力学建模,给出控制结构及控制问题研究所需的假设条件。

1.1 无拖曳控制系统动力学建模

以LISA Pathfinder空间引力波探测任务航天器为样例^[10,21]建立无拖曳控制系统动力学模型。执行探测任务的航天器构型如图1^[10]所示,其由2个对置的检验质量TM1、TM2及航天器自身构成3个相互关联的物理实体, $OX_1Y_1Z_1$ 坐标系为航天器绝对运动坐标系, $oxyz$ 坐标系为航天器本体坐标系。根据文献[11]中的分析,该多

体动力学方程可以描述为近似二阶形式:

$$\mathbf{M}_q \ddot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{K}_{LTP} \mathbf{q}^* + \mathbf{K}_s \mathbf{q} + \mathbf{f}_{stray} + \mathbf{f}_{actuation} + \mathbf{M}_u \ddot{\mathbf{u}}_{sc} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{f}_{actuation}$ 为低频悬架标称力; \mathbf{f}_{stray} 为包括各种来源的力或力矩总噪声; \mathbf{K}_{LTP} 为惯性传感器标准刚度; \mathbf{K}_s 为惯性传感器寄生刚度; \mathbf{q}^* 是计及每个测试质量外壳与光学平台机械变形及航天器接口机械变形的检验质量相对航天器位移; \mathbf{q} 为检验质量相对航天器位移标称值; \mathbf{M}_q 、 \mathbf{M}_u 分别为检验质量内部和检验质量对航天器绝对运动的敏感度矩阵; \mathbf{u}_{sc} 为航天器的绝对运动位移矩阵。

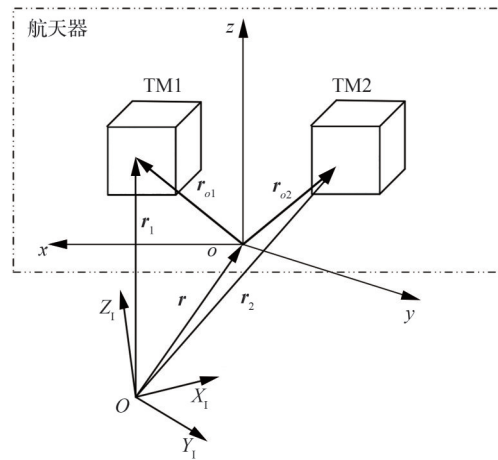


图1 LISA Pathfinder航天器构型^[10]

Fig. 1 LISA Pathfinder satellite configuration^[10]

将检验质量相对位移和航天器绝对运动表述为

$$\mathbf{q} = [\mathbf{r}_1^T, \boldsymbol{\varphi}_1^T, \mathbf{r}_2^T, \boldsymbol{\varphi}_2^T]^T, \mathbf{u}_{sc} = [\mathbf{r}^T, \boldsymbol{\varphi}^T]^T$$

式中: \mathbf{r} 和 $\boldsymbol{\varphi}$ 分别代表航天器线位移矩阵与姿态向量; \mathbf{r}_i 和 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 为第*i*个检验质量的线位移矩阵与角位移向量, $i=1,2$ 。同时给出基于标称位置矢量、检验质量及转动惯量表达的敏感度矩阵详细表述:

$$\mathbf{M}_q = \begin{bmatrix} m_1 \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_1 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & m_2 \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_u = \begin{bmatrix} -m_1 \mathbf{E}_{3 \times 3} & m_1 \tilde{\mathbf{r}}_{o1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{I}_1 \\ -m_2 \mathbf{E}_{3 \times 3} & m_2 \tilde{\mathbf{r}}_{o2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

式中: m_1 、 m_2 、 \mathbf{I}_1 、 \mathbf{I}_2 为检验质量及转动惯量; $\tilde{\mathbf{r}}_{o1}$ 、 $\tilde{\mathbf{r}}_{o2}$ 为根据标称位置矢量 $\mathbf{r}_{o1} = [r_{o1,x}, r_{o1,y}, r_{o1,z}]^T$ 和

$\mathbf{r}_{o2} = [r_{o2,x}, r_{o2,y}, r_{o2,z}]^T$ 定义的斜对称交叉矩阵, 表述为

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{r}}_{o1} = \begin{bmatrix} 0 & -r_{o1,z} & r_{o1,y} \\ r_{o1,z} & 0 & -r_{o1,x} \\ -r_{o1,y} & r_{o1,x} & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & -r_{o2,z} & r_{o2,y} \\ r_{o2,z} & 0 & -r_{o2,x} \\ -r_{o2,y} & r_{o2,x} & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

认为 $\mathbf{q}^* = \mathbf{q}$, 假设系统动力学仅存在小角度旋转, 给出系统动力学的进一步简化形式:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \\ \ddot{\mathbf{r}}_1 \\ \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_1 \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 \\ \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -\mathbf{T}_{1B} & \mathbf{T}_{1B} \tilde{\mathbf{r}}_{o1} & \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{T}_{1B} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -\mathbf{T}_{2B} & \mathbf{T}_{2B} \tilde{\mathbf{r}}_{o2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{T}_{2B} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{E}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{a}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: \mathbf{T}_{1B} 、 \mathbf{T}_{2B} 为在标称位置下, 航天器主体到检验质量块的变换矩阵。

定义航天器和检验质量块加速度为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{I}^{-1} \mathbf{t}, \boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{I}_1^{-1} \mathbf{t}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{I}_2^{-1} \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{a} = \frac{1}{m} \mathbf{f}, \mathbf{a}_1 = \frac{1}{m_1} \mathbf{f}_1, \mathbf{a}_2 = \frac{1}{m_2} \mathbf{f}_2 \end{cases}$$

式中: m 和 \mathbf{I} 分别为航天器的质量和转动惯量; \mathbf{t} 、 \mathbf{t}_1 、 \mathbf{t}_2 、 \mathbf{f} 、 \mathbf{f}_1 和 \mathbf{f}_2 为分别作用于各物理实体上的合外力矩和合外力。

根据 LISA Pathfinder 任务规则, 在执行科学探测模式 1 (或称测试模式 M3) 时, 选取检验质量 1 的 3 个平动自由度、1 个转动自由度和检验质量 2 的 2 个平动自由度执行无拖曳控制, 其余 6 个自由度则执行静电悬浮控制^[10]。根据文献[11]给出的坐标选择矩阵 \mathbf{D}_{DF} 和 \mathbf{D}_{SUS} , 将无拖曳系统动力学模型重新表述为

$$\begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{DF} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{SUS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ATT} & \mathbf{0}_{6 \times 3} \\ \mathbf{D}_{DF} \mathbf{B}_1 & \mathbf{D}_{DF} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{D}_{SUS} \mathbf{B}_1 & \mathbf{D}_{SUS} \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{SC} \\ \mathbf{a}_{TM} \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中: \mathbf{q}_{DF} 和 \mathbf{q}_{SUS} 分别为无拖曳控制与静电悬浮控

制坐标; \mathbf{B}_1 、 \mathbf{B}_2 和 \mathbf{B}_{ATT} 为参数矩阵, 定义为

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{ATT} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{E}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_{1B} & \mathbf{T}_{1B} \tilde{\mathbf{r}}_{o1} \\ 0 & -\mathbf{T}_{1B} \\ -\mathbf{T}_{2B} & \mathbf{T}_{2B} \tilde{\mathbf{r}}_{o2} \\ 0 & -\mathbf{T}_{2B} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_2 = \mathbf{E}_{3 \times 3} \end{cases}$$

\mathbf{a}_{SC} 和 \mathbf{a}_{TM} 分别为航天器和检验质量块所受合外力和力矩, $\mathbf{a}_{SC} = [\mathbf{a}^T, \boldsymbol{\alpha}^T]^T$; $\mathbf{a}_{TM} = [\mathbf{a}_1^T, \boldsymbol{\alpha}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \boldsymbol{\alpha}_2^T]^T$ 。认为合外力和力矩由控制器输入 \mathbf{u}_T 和 \mathbf{u}_S 、外界干扰 \mathbf{d}_{SC} 和 \mathbf{d}_{TM} 以及检验质量刚度变形构成, 将系统开环动力学最终表达为

$$\begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{DF} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{SUS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ATT} & \mathbf{0}_{6 \times 3} & \mathbf{0}_{6 \times 3} \\ \mathbf{B}_{DF} & \mathbf{E}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{B}_{SUS} & \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{E}_{6 \times 6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_T \\ \mathbf{u}_{S1} \\ \mathbf{u}_{S2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{SC} \\ \mathbf{d}_{TM1} \\ \mathbf{d}_{TM2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 3} & \mathbf{0}_{6 \times 3} & \mathbf{0}_{6 \times 3} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & -\boldsymbol{\Omega}_{DF}^2 & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & -\boldsymbol{\Omega}_C^2 & -\boldsymbol{\Omega}_{SUS}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi} \\ \mathbf{q}_{DF} \\ \mathbf{q}_{SUS} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中: $\mathbf{B}_{DF} = \mathbf{D}_{DF} \mathbf{B}_1$; $\mathbf{B}_{SUS} = \mathbf{D}_{SUS} \mathbf{B}_1$; \mathbf{u}_{S1} 和 \mathbf{u}_{S2} 为悬浮控制输入, $\mathbf{u}_{S1} = \mathbf{D}_{DF} \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_S$, $\mathbf{u}_{S2} = \mathbf{D}_{SUS} \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_S$; \mathbf{d}_{TM1} 、 \mathbf{d}_{TM2} 为无拖曳系统输入噪声; $\boldsymbol{\Omega}_{DF}^2$ 、 $\boldsymbol{\Omega}_{SUS}^2$ 为刚度矩阵; $\boldsymbol{\Omega}_C^2$ 为交叉耦合矩阵, 为对角矩阵。

仅针对无拖曳控制回路进行分析, 定义状态量 $\mathbf{x} = [\mathbf{q}_{DF}, \dot{\mathbf{q}}_{DF}]^T$, 则计及输入干扰的无拖曳控制回路标准形式可表述为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} (\mathbf{u}_T + \mathbf{d}_{TM}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} \end{cases} \quad (5)$$

式中: $\mathbf{d}_{TM} = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{u}_{S1} + \mathbf{d}_{TM1}) + \mathbf{d}_{SC}$ 为系统总噪声; \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 为系统状态参数矩阵, 认为 \mathbf{C} 已知,

\mathbf{A} 和 \mathbf{B} 为缓慢时变的矩阵, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{E}_{6 \times 6} \\ -\boldsymbol{\Omega}_{DF}^2 & \mathbf{0}_{6 \times 6} \end{bmatrix}$,

$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{B}_{DF} \end{bmatrix}$; \mathbf{y} 为输出, 定义 $\mathbf{y}(t) = \mathbf{G}(s) [\mathbf{u}](t)$, 其中 $[\cdot](t)$ 为一种结合时域和频域信号运算的简单符号^[14]。给出如下所示假设:

假设 1 认为扰动项连续有界, 并满足如下所示不等式:

$$\|\mathbf{d}_{TM}\| \leq \bar{d}_{TM} + L \|\mathbf{e}\|^2 + L_1 \|\mathbf{e}\|^{1+\alpha} + L_2 \|\mathbf{e}\|^{1+\gamma} \quad (6)$$

式中: \bar{d}_{TM} , L , L_1 , $L_2 \in \mathbb{R}^+$ 认为已知; $\alpha \in (0, 1)$; $\gamma > 1$;

输出逼近误差 $\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_m(t)$, \mathbf{y}_m 为参考

输出。

1.2 控制系统架构

为了实现连续有界外界干扰的逼近与反馈,提高系统鲁棒性,采取基于LMIs解的鲁棒控制方法设计反馈控制器,并将该控制器用于基于输出调节的多变量MRAC结构中,实现无拖曳系统的精确控制,在确保系统快速稳定的前提下实现检验质量对指令的精确跟踪,以及多变量无拖曳控制系统的稳定闭环控制。其中,基于LMIs的鲁棒修正项基于Lyapunov分析构造,用于确保系统各闭环信号跟踪的一致渐进稳定性,控制系统架构如图2所示。

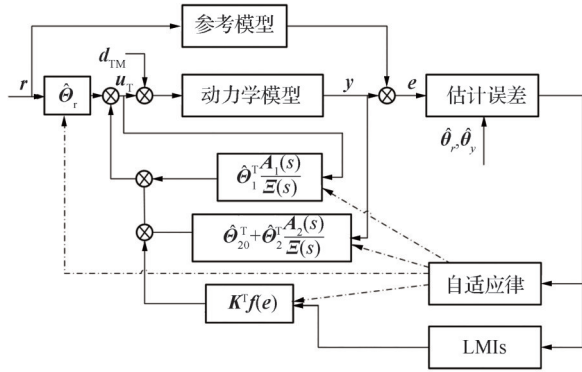


图2 控制系统架构

Fig. 2 Control system framework

2 基于LMI-MRAC的无拖曳控制系统设计

本节将首先设计基于输出跟踪的MRAC控制器,并在自适应律修正项设计中,利用稳定性分析构造一组线性矩阵不等式用于鲁棒控制修正项的求解,从而完成无拖曳控制系统的设计。

2.1 控制结构

利用系统输出 $y(t) = Cx(t)$ 首先观测系统状态,并基于观测状态设计反馈控制结构。控制器的设计用于满足式(7)所述模型匹配条件^[12]:

$$y_m(t) = C(sE - A_m)^{-1} B_m[r](t) \quad (7)$$

式中: A_m 和 B_m 为参考模型状态参数矩阵, $A_m = A + BK_1^T$, $B_m = BK_2^*$; r 为参考输入。将式(7)代入对象模型中,将闭环系统改写为

$$\dot{x} = A_m x + B_m K_2^{*-1} (u_T + d_{TM} - K_1^{*T} x) \quad (8)$$

给出包含干扰反馈的标准状态反馈控制律:

$$u_T(t) = K_1^{*T} \hat{x}(t) + K_2^* r(t) + K_2^* K^T f(e) \quad (9)$$

式中: $f(e) = [f_0^T(e), f_1^T(e), f_2^T(e)]^T$, $f_0(e) = |e|^0 \cdot \text{sgn}(e)$, $f_1(e) = |e|^\alpha \text{sgn}(e)$, $f_2(e) = |e|^\gamma \text{sgn}(e)$; K_1^* , K_2^* , K 为反馈增益。

由于仅有输出信息已知, $\hat{x}(t)$ 基于观测器设计给出。引入变换矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$,使得 $CP^{-1} = [E_{n_0 \times n_0}, 0]$ 且 $n_0 = \text{rank}(C)$,从而将系统状态方程转换为 $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u_T(t)$, $\bar{A} = PAP^{-1}$, $\bar{B} = PB$ 。将系统全状态方程表述为

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} [u_T + d_{TM}](t) \quad (10)$$

式中: $\bar{x}(t) = Px(t) = [\bar{x}_1^T(t), \bar{x}_2^T(t)]^T$, $\bar{x}_1(t) \in \mathbb{R}^{n_0}$, $\bar{x}_2(t) \in \mathbb{R}^{n-n_0}$; $\bar{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_0 \times n_0}$, $\bar{A}_{12} \in \mathbb{R}^{n_0 \times (n-n_0)}$, $\bar{A}_{21} \in \mathbb{R}^{(n-n_0) \times n_0}$, $\bar{A}_{22} \in \mathbb{R}^{(n-n_0) \times (n-n_0)}$; $\bar{B}_1 \in \mathbb{R}^{n_0 \times M}$, $\bar{B}_2 \in \mathbb{R}^{(n-n_0) \times M}$ 。

根据文献[18],容易得知当 A, C 可观测时, $\bar{A}_{22}, \bar{A}_{12}$ 也可观测。由此,将全状态观测器表达为

$$\hat{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ w(t) + L_r y(t) \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中: $\hat{\bar{x}}_1, \hat{\bar{x}}_2$ 为各状态的观测值; $L_r \in \mathbb{R}^{(n-n_0) \times n_0}$ 为恒定增益矩阵,用于保证特征值矩阵 $\bar{A}_{22} - L_r \bar{A}_{12}$ 稳定。根据观测器设计结果,可将 $w(t) \in \mathbb{R}^{n-n_0}$ 用式(12)表达为

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) = & (\bar{A}_{22} - L_r \bar{A}_{12}) w(t) + \\ & (\bar{B}_2 - L_r \bar{B}_1) [u_T + d_{TM}](t) + \\ & [(\bar{A}_{22} - L_r \bar{A}_{12}) L_r + \bar{A}_{21} - L_r \bar{A}_{11}] y(t) \end{aligned} \quad (12)$$

在式(12)所示的状态观测器的设计中,存在 $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} P^{-1} (\bar{x}(t) - \hat{\bar{x}}(t)) = 0$,观测误差实现收敛。利用式(12)求解 $w(t)$,容易得到

$$w(t) = \epsilon_0(t) + \frac{N_1(s)}{\Xi(s)} [u_T + d_{TM}](t) + \frac{N_2(s)}{\Xi(s)} [y](t) \quad (13)$$

式中:

$$\begin{cases} \frac{N_1(s)}{\Xi(s)} = (sE - \bar{A}_{22} + L_r \bar{A}_{12})^{-1} (\bar{B}_2 - L_r \bar{B}_1) \\ \frac{N_2(s)}{\Xi(s)} = (sE - \bar{A}_{22} + L_r \bar{A}_{12})^{-1} \times \\ \quad [(\bar{A}_{22} - L_r \bar{A}_{12}) L_r + \bar{A}_{21} - L_r \bar{A}_{11}] \end{cases}$$

$\epsilon_0(t) = \exp((\bar{A}_{22} - L_r \bar{A}_{12})t) \mathbf{w}(0)$ 代表由初值引发的误差影响, $\mathbf{w}(0)$ 为 $L_r \mathbf{y}(0) - \bar{\mathbf{x}}_2(0)$ 的估计; $\Xi(s) = \det(sE - \bar{A}_{22} + L_r \bar{A}_{12})$ 。

将控制器的状态反馈部分表达为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1^{*T} \hat{\mathbf{x}}(t) &= \Theta_1^{*T} \frac{A_1(s)}{\Xi(s)} [\mathbf{u}_r + \mathbf{d}_{TM}](t) + \Theta_{20}^{*T} \mathbf{y}(t) + \\ &\Theta_2^{*T} \frac{A_2(s)}{\Xi(s)} [\mathbf{y}](t) + \mathbf{K}_{p2}^* \exp((\bar{A}_{22} - L_r \bar{A}_{12})t) \mathbf{w}(0) \end{aligned} \quad (14)$$

式中:

$$\begin{cases} A_1(s) = [E_{M \times M}, sE_{M \times M}, \dots, s^{n-n_0-1} E_{M \times M}]^T \\ A_2(s) = [E_{n_0 \times n_0}, sE_{n_0 \times n_0}, \dots, s^{n-n_0-1} E_{n_0 \times n_0}]^T \\ \Theta_1^* \in \mathbb{R}^{M(n-n_0) \times M}, \Theta_2^* \in \mathbb{R}^{n_0(n-n_0) \times M} \\ \Theta_3^* \in \mathbb{R}^{M \times M}, \Theta_{20}^{*T} = \mathbf{K}_{p1}^* + \mathbf{K}_{p2}^* L_r \\ \mathbf{K}_{p2}^* N_1(s) = \Theta_1^{*T} A_1(s), \mathbf{K}_{p2}^* N_2(s) = \Theta_2^{*T} A_2(s) \\ \mathbf{K}_1^{*T} P^{-1} = [\mathbf{K}_{p1}^*, \mathbf{K}_{p2}^*], \mathbf{K}_{p1}^* \in \mathbb{R}^{M \times n_0}, \mathbf{K}_{p2}^* \in \mathbb{R}^{M \times (n-n_0)} \end{cases}$$

基于上述推导与 $\Theta_3^* = \mathbf{K}_2^*$, 并忽略指数衰减项 $\mathbf{K}_{p2}^* \exp((\bar{A}_{22} - L_r \bar{A}_{12})t) \mathbf{w}(0)$, 将标准控制器输入整理为仅包含输出反馈的形式:

$$\mathbf{u}_r = \Theta_r^* (\mathbf{r} + \mathbf{K}^T \mathbf{f}(\mathbf{e})) + \Theta_y^{*T} [\mathbf{y}](t) + \mathbf{d}_1 \quad (15)$$

式中:

$$\begin{cases} \Theta_r^* = \left(E - \Theta_1^{*T} \frac{A_1(s)}{\Xi(s)} \right)^{-1} \Theta_3^* \\ \Theta_y^{*T} = \left(E - \Theta_1^{*T} \frac{A_1(s)}{\Xi(s)} \right)^{-1} \left(\Theta_{20}^{*T} + \Theta_2^{*T} \frac{A_2(s)}{\Xi(s)} \right) \\ \mathbf{d}_1 = \left(E - \Theta_1^{*T} \frac{A_1(s)}{\Xi(s)} \right)^{-1} \Theta_1^{*T} \frac{A_1(s)}{\Xi(s)} \mathbf{d}_{TM} \end{cases}$$

2.2 基于输出跟踪的鲁棒自适应控制器设计

首先探讨模型的输出匹配条件, 即自适应律的存在性。文献[13]中已针对基于输出反馈控制器的对象模型输出匹配性做出探讨和证明, 即认为由输出反馈推导得到的观测状态反馈控制

器在满足匹配条件(式(7))时, 能够确保模型输出匹配, 其收敛误差在任何初始条件下都能以指数速度收敛至0, 且闭环信号 $\mathbf{y}(t)$ 有界的结论也已得到充分证明。

自适应控制方案的引入旨在解决系统状态参数矩阵未知的问题, 其设计基于由系统输出误差构成的微分方程。由于 \mathbf{d}_1 不可知并将利用鲁棒控制方案进行补偿, 因此忽略 \mathbf{d}_1 并给出输出反馈控制器式(15)的自适应版本:

$$\mathbf{u}_r = \hat{\Theta}_r (\mathbf{r} + \mathbf{K}^T \mathbf{f}(\mathbf{e})) + \hat{\Theta}_y^T [\mathbf{y}](t) \quad (16)$$

式中: $\hat{\Theta}_r, \hat{\Theta}_y$ 为 Θ_r^*, Θ_y^* 的自适应估计。将控制器式(16)代入式(5), 并整理为基于输出跟踪的形式:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{A}_m \mathbf{y} + \mathbf{B}_m P^{-1} \Theta_3^{*-1} [(\tilde{\Theta}_r + \Theta_3^*) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{e}) + \\ &\tilde{\Theta}_y^T [\mathbf{y}](t) + \mathbf{d}_0] \end{aligned} \quad (17)$$

式中: $\mathbf{d}_0 = \mathbf{d}_{TM} - \mathbf{d}_1$; $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{e}) = \mathbf{r} + \mathbf{K}^T \mathbf{f}(\mathbf{e})$; $\tilde{\Theta}_y = \Theta_y^* - \hat{\Theta}_y$; $\tilde{\Theta}_r = \Theta_r^* - \hat{\Theta}_r$ 。

代入参考模型式(7), 得到闭环误差方程:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \mathbf{A}_m \mathbf{e} + \mathbf{B}_m P^{-1} (\mathbf{K}^T \mathbf{f}(\mathbf{e}) + \tilde{\boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{e}) + \\ &\tilde{\boldsymbol{\theta}}_y [\mathbf{y}](t) + \bar{\mathbf{d}}_0) \end{aligned} \quad (18)$$

式中引入下述状态参数定义:

$$\bar{\mathbf{d}}_0 = \Theta_3^{*-1} \mathbf{d}_0, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r = \Theta_3^{*-1} \tilde{\Theta}_r, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_y = \Theta_3^{*-1} \tilde{\Theta}_y^T$$

根据误差方程给出自适应律:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\Theta}}_r = -k_1^{-1} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{e}) (\mathbf{e}^T P_0 + \mathbf{f}^T(\mathbf{e}) \boldsymbol{\Lambda}) \mathbf{B}_m P^{-1} \\ \dot{\hat{\Theta}}_y = -k_2^{-1} \mathbf{y} (\mathbf{e}^T P_0 + \mathbf{f}^T(\mathbf{e}) \boldsymbol{\Lambda}) \mathbf{B}_m P^{-1} \end{cases} \quad (19)$$

式中: $k_1 > 0, k_2 = k_2 > 0, \mathbf{K} = [k_3^T, k_4^T, k_5^T]^T, 0 \leq P_0 = P_0^T, \boldsymbol{\Lambda} = [\boldsymbol{\Lambda}_0, \boldsymbol{\Lambda}_1, \boldsymbol{\Lambda}_2]^T, \boldsymbol{\Lambda}_j = \text{diag}\{\lambda_{ij}\}, \lambda_{ij} \in \mathbb{R}^+$ ($i=1, 2, \dots, n$), 则状态参数具有如式(20)所示形式:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\theta}}_r = -\Theta_3^{*-1} k_1^{-1} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{e}) (\mathbf{e}^T P_0 + \mathbf{f}^T(\mathbf{e}) \boldsymbol{\Lambda}) \mathbf{B}_m P^{-1} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_y = -\Theta_3^{*-1} [k_2^{-1} \mathbf{y} (\mathbf{e}^T P_0 + \mathbf{f}^T(\mathbf{e}) \boldsymbol{\Lambda}) \mathbf{B}_m P^{-1}]^T \end{cases} \quad (20)$$

注意到持续激励(Persistence of Excitation, PE)条件在参考输入 \mathbf{r} 上的持续存在, 因此在闭环系统方程中, 回归项 $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{e})$ 也满足持续激励条件。根据文献[17], 容易得到当系统无外界扰动时, 闭环信号是全局一致渐近稳定(Globally Uni-

formly Asymptotically Stable, GUAS)的。考虑到系统式(5)存在扰动 \bar{d}_0 ,根据假设1,也认为 \bar{d}_0 有界,并满足:

$$\|\bar{d}_0\| \leq L_0 + L^* \|e\|^2 + L_1^* \|e\|^{1+\alpha} + L_2^* \|e\|^{1+\gamma} \quad (21)$$

式中: $L_0, L^*, L_1^*, L_2^* \in \mathbb{R}^+$ 认为已知。注意到由于该扰动中存在收敛误差的幂次项,这意味着一般的线性控制方法并不能抑制这一部分扰动,进一步说明了设计非线性控制器的必要性。包含自适应律式(19)和控制器式(16)的闭环系统收敛性分析将基于以下定理。

定理1 基于鲁棒非线性MRAC控制器的闭环系统式(5)中,当选取自适应律式(19)和控制器式(16),且输入干扰满足式(21)时,存在 $0 < X^T = X \in \mathbb{R}^{n \times n}, Y_j \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \Phi = \text{diag}\{\phi_i\} > 0$ 和 $\Omega_j = \text{diag}\{\omega_{ji}\} > 0 (i = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2)$,使得式(22)所述线性矩阵不等式组:

$$\begin{cases} \mathbf{1}_n^T [\delta(B_m P^{-1} Y_0 + X A_m^T) + \chi(B_m P^{-1} Y_0 + X A_m^T) + \Omega_0] \leq 0 \\ \mathbf{1}_n^T (1 + \alpha) \delta(B_m P^{-1} Y_1 + X A_m^T) + \alpha \chi(B_m P^{-1} Y_1 + X A_m^T) + \Omega_0 \leq 0 \\ \mathbf{1}_n^T [(1 + \gamma) \delta(B_m P^{-1} Y_2 + X A_m^T) + \gamma \chi(B_m P^{-1} Y_2 + X A_m^T) + \chi^T(B_m P^{-1} Y_2 + X A_m^T) + (1 + \gamma) \Omega] \leq 0 \\ \Phi - \mu L^* E_{n \times n} + \sum_{s=1}^2 2\Omega_s - \mu L_s^* E_{n \times n} + \Omega_0 > 0 \quad s=1, 2 \\ \Phi > \mu L^* E_{n \times n} \\ 2\Omega_s - \mu L_s^* E_{n \times n} > 0 \quad s=1, 2 \\ \tilde{Q} \leq 0 \end{cases} \quad (22)$$

对于固定的 $0 < \Lambda_j = \text{diag}\{\lambda_{ij}\}$ 而言成立。其中对称矩阵 \tilde{Q} 表示为

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} A_m X + X A_m^T + \Phi & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_m P^{-1} \\ * & B_m P^{-1} Y_0 + Y_0^T P^{-1} B_m^T + \frac{\mu L_0}{n} A_0^{-2} & B_m P^{-1} Y_1 + Y_1^T P^{-1} B_m^T & B_m P^{-1} Y_2 + Y_2^T P^{-1} B_m^T & B_m P^{-1} \\ * & * & B_m P^{-1} Y_1 + Y_1^T P^{-1} B_m^T & B_m P^{-1} Y_2 + Y_2^T P^{-1} B_m^T & B_m P^{-1} \\ * & * & * & B_m P^{-1} Y_2 + Y_2^T P^{-1} B_m^T & B_m P^{-1} \\ * & * & * & * & -\mu E_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (23)$$

式中: $\mu \in \mathbb{R}^+$; $\delta(\mathfrak{B})$ 表示仅包含 \mathfrak{B} 的主对角线元素的矩阵; $\chi(\mathfrak{B})$ 对应主对角线上元素为零,且其他元素等于 \mathfrak{B} 上对应元素绝对值的矩阵; $\mathbf{1}_n^T$ 代表维数为 n 、各元素均为1的行向量。考虑选取 $k_1, k_2 > 0, k_{j+3}^T = Y_j \Lambda_j, P_0 = X^{-1}$,则各闭环信号有界,跟踪误差全局一致渐进稳定,且 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 。

证明 给出如式(24)所示的Lyapunov函数:

$$V = e^T P_0 e + \Theta_3^* k_1 \tilde{\theta}_r^2 + \Theta_3^* \tilde{\theta}_y^T k_2 \tilde{\theta}_2 + 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=1}^n \lambda_{ji} \int_0^{e_i} f_{ji}(s) ds \quad (24)$$

对式(24)两边求取一阶微分:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e^T (P_0 A_m + A_m^T P_0) e + 2e^T P_0 B_m P^{-1} \left(\sum_{j=0}^2 k_{j+3}^T f_j(e) \right) + 2e^T P_0 (B_m P^{-1} \bar{d}_0 + \tilde{\theta}_r \varphi(r, e) + \tilde{\theta}_y e) + \\ & 2\Theta_3^* \varphi^T(r, e) k_1 \dot{\tilde{\theta}}_y + 2\Theta_3^* \tilde{\theta}_r^T k_2 \dot{\tilde{\theta}}_r + 2 \sum_{j=0}^2 (e^T A_m^T \Lambda_j f_j(e) + \sum_{s=0}^2 f_s^T(e) k_{s+3} P^{-1} B_m^T \Lambda_j f_j(e) + \\ & e^T \tilde{\theta}_y^T P^{-1} B_m^T \Lambda_j f_j(e) + \varphi^T(r, e) \tilde{\theta}_r^T P^{-1} B_m^T \Lambda_j f_j(e) + \bar{d}_0^T P^{-1} B_m^T \Lambda_j f_j(e)) \end{aligned} \quad (25)$$

注意到 $\tilde{\theta}_r = \Theta_3^{*-1} \tilde{\theta}_r$, $\tilde{\theta}_y = \Theta_3^{*-1} \tilde{\theta}_y^T$,代入自适应律式(19),将式(25)化简为

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \mathbf{e}^T (\mathbf{P}_0 \mathbf{A}_m + \mathbf{A}_m^T \mathbf{P}_0) \mathbf{e} + 2 \mathbf{e}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \left(\sum_{j=0}^2 \mathbf{k}_{j+3}^T \mathbf{f}_j(\mathbf{e}) \right) + \\ & 2 \sum_{j=0}^2 (\mathbf{e}^T \mathbf{A}_m^T \mathbf{A}_j \mathbf{f}_j(\mathbf{e}) + \sum_{s=0}^2 \mathbf{f}_s^T(\mathbf{e}) \mathbf{k}_{s+3} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}_m^T \mathbf{A}_j \mathbf{f}_j(\mathbf{e})) + 2 \mathbf{e}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \bar{\mathbf{d}}_0 + 2 \sum_{j=0}^2 \bar{\mathbf{d}}_0^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}_m^T \mathbf{A}_j \mathbf{f}_j(\mathbf{e}) \end{aligned} \quad (26)$$

利用式(25)~式(26)基于Lyapunov函数的式,将式(26)进一步改写为
 推导构造LMI。为得到基于LMI表达的一般形

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \bar{\mathbf{d}}_0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \mathbf{A}_m + \mathbf{A}_m^T \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_0 \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_m^T \mathbf{A}_0 & \mathbf{P}_0 \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_m^T \mathbf{A}_1 & \mathbf{P}_0 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_m^T \mathbf{A}_2 & \mathbf{P}_0 \mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \\ * & \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0 + \frac{\mu L_0}{n} \mathbf{E}_{n \times n} & \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0 & \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}_m^T \mathbf{A}_0 \\ * & * & \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 & \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}_m^T \mathbf{A}_1 \\ * & * & * & \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_2 & \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}_m^T \mathbf{A}_2 \\ * & * & * & * & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \bar{\mathbf{d}}_0 \end{bmatrix} - \\ & \frac{\mu L_0}{n} \mathbf{f}_0^T \mathbf{f}_0 + \mu \bar{\mathbf{d}}_0^T \bar{\mathbf{d}}_0 = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{Q}_a \boldsymbol{\xi} - \frac{\mu L_0}{n} \mathbf{f}_0^T \mathbf{f}_0 + \mu \bar{\mathbf{d}}_0^T \bar{\mathbf{d}}_0 \end{aligned} \quad (27)$$

式中: $\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \mathbf{k}_3$; $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \mathbf{k}_4$; $\mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \mathbf{k}_5$;
 $\bar{\mathbf{d}}_0 \in \mathbb{R}^+$ 已由式(21)给出。

对 \mathbf{Q}_a 两边同时左乘及右乘 $\mathbf{S} = \text{diag}$
 $(\mathbf{P}_0^{-1}, \mathbf{A}_0^{-1}, \mathbf{A}_1^{-1}, \mathbf{A}_2^{-1})$, 得到

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_b = & \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_m^T & \mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}_0 + \mathbf{X} \mathbf{A}_m^T & \mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}_1 + \mathbf{X} \mathbf{A}_m^T & \mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}_2 + \mathbf{X} \mathbf{A}_m^T & \mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \\ * & \mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}_0^T \mathbf{P}^{\text{T}-1} \mathbf{B}_m^T + \frac{\mu L_0}{n} \mathbf{A}_0^{-2} & \mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_0^T \mathbf{P}^{\text{T}-1} \mathbf{B}_m^T & \mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_0^T (\mathbf{P}^{\text{T}})^{-1} \mathbf{B}_m^T & \mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \\ * & * & \mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_1^T \mathbf{P}^{\text{T}-1} \mathbf{B}_m^T & \mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_1^T (\mathbf{P}^{\text{T}})^{-1} \mathbf{B}_m^T & \mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \\ * & * & * & \mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_2^T (\mathbf{P}^{\text{T}})^{-1} \mathbf{B}_m^T & \mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \\ * & * & * & * & -\mu \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

为保证 \mathbf{Q}_b 半负定,对矩阵中以下部分项:

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_{b12} = \mathbf{Q}_{b21} = \mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}_0 + \mathbf{X} \mathbf{A}_m^T \\ \mathbf{Q}_{b13} = \mathbf{Q}_{b31} = \mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}_1 + \mathbf{X} \mathbf{A}_m^T \\ \mathbf{Q}_{b14} = \mathbf{Q}_{b41} = \mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}_2 + \mathbf{X} \mathbf{A}_m^T \end{cases} \quad (29)$$

按文献[17]进行处理并将上述项自 \mathbf{Q}_b 中予以剔除,整理后得到

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \boldsymbol{\xi}^T \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\xi} - \mathbf{e}^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{e} - 2 \sum_{j=0}^2 \mathbf{e}^T \boldsymbol{\Omega}_j \mathbf{f}_j(\mathbf{e}) - \frac{\mu L_0}{n} \mathbf{f}_0^T \mathbf{f}_0 + \\ & 2 \sum_{j=0}^2 \mathbf{e}^T (\mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}_j + \mathbf{X} \mathbf{A}_m^T + \boldsymbol{\Omega}_j) \mathbf{f}_j(\mathbf{e}) + \mu \bar{\mathbf{d}}_0^T \bar{\mathbf{d}}_0 \end{aligned} \quad (30)$$

式中 $\tilde{\mathbf{Q}}$ 的形式已由式(23)给出。

由此,若想保证系统稳定,需选取 $\mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}_j +$
 $\mathbf{X} \mathbf{A}_m^T + \boldsymbol{\Omega}_j$ 中主对角线元素半负定。同时,式(30)

中的矩阵交叉项可按杨氏不等式进行处理:

$$\begin{cases} e_i f_0(e_k) \leq |e_i| \\ e_i f_1(e_k) \leq \frac{|e_i|^{1+\alpha}}{1+\alpha} + \frac{\alpha |e_i|^{1+\alpha}}{1+\alpha} \\ e_i f_2(e_k) \leq \frac{|e_i|^{1+\gamma}}{1+\gamma} + \frac{\gamma |e_i|^{1+\gamma}}{1+\gamma} \end{cases} \quad (31)$$

其中 $i \neq k$ 。以 \mathbf{Q}_{b13} 为例分析 $\mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}_j + \mathbf{X} \mathbf{A}_m^T + \boldsymbol{\Omega}_j$
 的上界,利用式(31)得到

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}_n^T \boldsymbol{\delta}(\mathbf{Q}_{b13}) |e|^{a+1} + \mathbf{1}_n^T \frac{\alpha \boldsymbol{\chi}(\mathbf{Q}_{b13})}{1+\alpha} |e|^{a+1} + \\ & \mathbf{1}_n^T \frac{\boldsymbol{\chi}(\mathbf{Q}_{b13})}{1+\alpha} |e|^{a+1} + \mathbf{1}_n^T \boldsymbol{\Omega}_1 |e|^{a+1} \leq 0 \end{aligned} \quad (32)$$

利用式(22)中的LMI可用性对式(32)进行

分析,可以得到 $\mathbf{e}^T(\mathbf{B}_m \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}_j + \mathbf{X} \mathbf{A}_m^T + \boldsymbol{\Omega}_j) \mathbf{f}_j(\mathbf{e}) \leq 0$ 。由此, \dot{V} 的上界可以表示为

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{e} - 2 \sum_{j=0}^2 \mathbf{e}^T \boldsymbol{\Omega}_j \mathbf{f}_j(\mathbf{e}) - \frac{\mu L_0}{n} \mathbf{f}_0^T \mathbf{f}_0 + \mu \bar{\mathbf{d}}_0^T \bar{\mathbf{d}}_0 \quad (33)$$

根据假设 1, 式(33)进一步整理为

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^T (\boldsymbol{\Phi} - \mu \mathbf{L}^*) \mathbf{e} - \sum_{s=1}^2 \mathbf{e}^T (2\boldsymbol{\Omega}_j - \mu \mathbf{L}_s^*) \mathbf{f}_s(\mathbf{e}) - 2\mathbf{e}^T \boldsymbol{\Omega}_0 \mathbf{f}_0(\mathbf{e}) \quad (34)$$

由此,在任意选取的初值下,各闭环信号有界,跟踪误差全局一致渐进稳定,且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = 0$ 。

3 仿真结果

3.1 参数设置

数值仿真验证基于样例无拖曳控制非线性动力学模型^[11]。由于需考察闭环系统各状态响应的性能指标,部分数值仿真结果展示为频域形式。数值仿真验证了所提出的 LMI-MRAC 方案在无拖曳控制自由度上针对位移噪声抑制的闭环性能,仿真时间为 3 000 s,设置仿真步长为 0.1 s。设置如下以成型滤波器表达的执行器噪声为

$$L = K_1 \frac{s + z_1}{s + p_1} + \frac{K_2}{(s + p_2)(s + p_3)(s + p_4)(s + p_5)} \quad (35)$$

式中: $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, z_1, K_1$ 和 K_2 为噪声相关系数,

取值由文献[5]给出。动力学模型参数描述如下:

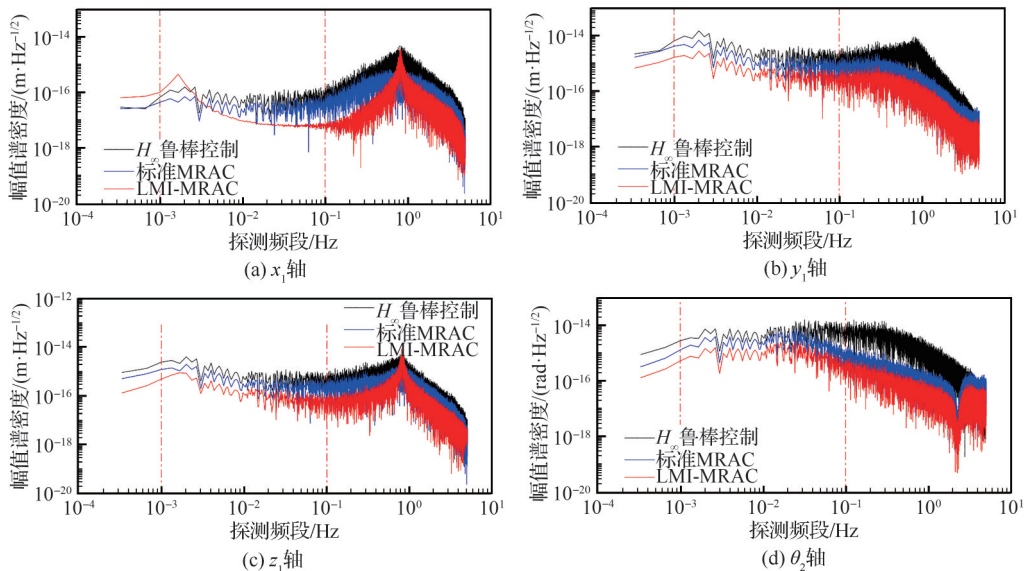
$$\mathbf{\Omega}_{DF}^2 = 10^{-7} \times \begin{bmatrix} 11.19 & 1.35 & 1.35 & 0.00425 & 0 & 0 \\ 1.35 & 9.55 & 1.35 & 0.00425 & 0 & 0 \\ 1.35 & 1.35 & 24.12 & 0.00425 & 0 & 0 \\ 26.087 & 26.087 & 26.087 & 30.64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9.55 & 1.35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.35 & 24.12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{DF} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

控制器设计中涉及的主要参数为: $\mathbf{k}_1 = 0.1 \times \mathbf{E}_{6 \times 6}$; $\mathbf{k}_2 = 0.05 \times \mathbf{E}_{6 \times 6}$; $\alpha = 0.9$; $\gamma = 1.2$; $\mu = 0.47$; $\lambda_{1i} = 2.3$; $\lambda_{2i} = 1.4$; $\lambda_{3i} = 1.6$; $L_0 = 1 \times 10^{-11}$; $\mathbf{L}^* = 2.5$; $L_1^* = 1.5$; $L_2^* = 0.5$ 。

3.2 仿真结果与分析

图 3 显示了该所提出的改进方案 LMI-MRAC 与传统 H_∞ 鲁棒控制方案^[22]和标准 MRAC 方案^[13]对位移扰动抑制的控制性能对比。仿真结果表明,在探测频段内,LMI-MRAC 方案能够实现闭环控制的鲁棒性。由惯性传感器、环境噪声及其他外部因素引起的复杂干扰包括线性部分及非线性部分,由于一般的鲁棒控制方法不具备非线性扰动抑制能力,而标准 MRAC 方法仅能确保



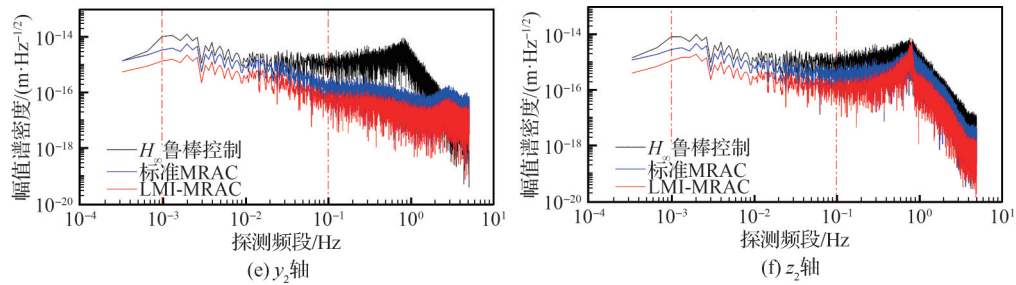


图3 不同方案下各自由度位移噪声对比

Fig. 3 Comparison of displacement noise at each DOF under different schemes

不确定性存在前提下系统跟踪性能,因此应对空间引力波探测无拖曳控制的复杂不确定性及外部干扰时,LMI-MRAC方案相比上述2种方案具有更有效的非线性扰动抑制能力,在闭环系统性能验证中体现为闭环系统位移噪声的抑制效果改善,验证了LMI-MRAC方案应对状态不确定性和参数时变性的优良控制效果。

图3表明,该方案下的闭环系统相比一般的输出调节MRAC方案具有更强的鲁棒性。MRAC主要用于实现实际响应对参考指令的自适应跟踪能力,应对复杂非线性扰动时,其稳定裕度不强,对控制器参数选取要求比较严格。在MRAC中引入LMI后,系统鲁棒性得到较大提升,尤其在应对强非线性或较大幅值扰动时,系统仍具有保持稳定跟踪的能力,从而提高了闭环系统的稳定裕度。

4 结论

设计了基于LMI及输出调节的MRAC方案,应用于空间引力波探测无拖曳控制问题中,提高了引力波探测多体闭环系统对复杂非线性项及其他未建模动态的逼近能力。在基于输出调节的MRAC方案中,基于Lyapunov分析构造LMI修正项,从而提高了系统稳定裕度,在保证跟踪性能的同时增强了鲁棒性。Lyapunov分析证明了各闭环信号全局一致渐进稳定和跟踪误差的收敛性,数值仿真验证了该控制方案的优良控制性能。

参 考 文 献

- [1] FICHTER W, GATH P, VITALE S, et al. LISA Pathfinder drag-free control and system implications[J]. Classical and Quantum Gravity, 2005, 22(10): S139-S148.
- [2] 邓剑峰,蔡志鸣,陈琨,等.无拖曳控制技术研究及在我国空间引力波探测中的应用[J].中国光学,2019,12(3):503-514.
DENG J F, CAI Z M, CHEN K, et al. Drag-free control and its application in China's space gravitational wave detection[J]. Chinese Optics, 2019, 12(3): 503-514 (in Chinese).
- [3] MOBLEY F, FOUNTAIN G, SADILEK A, et al. Electromagnetic suspension for the tip-II satellite[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1975, 11(6): 1712-1716.
- [4] 胡明,李洪银,周泽兵.无拖曳控制技术及其应用[J].载人航天,2013,19(2):61-69.
HU M, LI H Y, ZHOU Z B. Drag-free control technology and its applications[J]. Manned Spaceflight, 2013, 19(2): 61-69 (in Chinese).
- [5] FICHTER W, SCHLEICHER A, BENNANI S, et al. Closed loop performance and limitations of the LISA pathfinder drag-free control system: AIAA-2007-6732 [R]. Reston: AIAA, 2007.
- [6] 吴树范,王楠,龚德仁.引力波探测科学任务关键技术[J].深空探测学报,2020,7(2):118-127.
WU S F, WANG N, GONG D R. Key technologies for space science gravitational wave detection[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2020, 7(2): 118-127 (in Chinese).
- [7] 付海清,吴树范,刘梅林,等.基于干扰观测器的空间惯性传感器自适应控制[J/OL].北京航空航天大学学报(2022-05-17)[2022-06-01].https://doi.org/10.13700/j.bh.1001-5965.2021.0734.
FU H Q, WU S F, LIU M L, et al. Disturbance-observer based adaptive control for space inertial sensor [J/OL]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics (2022-05-17) [2022-06-01]. https://doi.org/10.13700/j.bh.1001-5965.2021.0734 (in Chinese).
- [8] 郝伟丞.基于高增益观测器的单质量无拖曳控制研究[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2021.

- HAO W C. Single mass drag-free control based on the high-gain observer[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2021 (in Chinese).
- [9] 王楠. 深空引力波探测的无拖曳控制技术研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2020.
WANG N. The research on drag-free control technology for deep space gravitational wave detection[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2020 (in Chinese).
- [10] MCNAMARA P, VITALE S, DANZMANN K. LISA Pathfinder[J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2008, 25(11): 114034.
- [11] WU S F, FERTIN D. Spacecraft drag-free attitude control system design with quantitative feedback theory[J]. *Acta Astronautica*, 2008, 62(12): 668-682.
- [12] LIAN X B, ZHANG J X, LU L, et al. Frequency separation control for drag-free satellite with frequency-domain constraints[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2021, 57(6): 4085-4096.
- [13] 张锦绣, 董晓光, 曹喜滨. 基于无速度测量的无拖曳卫星自适应控制方法[J]. *宇航学报*, 2014, 35(4): 447-453.
ZHANG J X, DONG X G, CAO X B. An adaptive controller for drag-free satellites without velocity measurement[J]. *Journal of Astronautics*, 2014, 35(4): 447-453 (in Chinese).
- [14] GUO J X, TAO G, LIU Y. A multivariable MRAC scheme with application to a nonlinear aircraft model[J]. *Automatica*, 2011, 47(4): 804-812.
- [15] FENG G. A robust approach to adaptive control algorithms [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(8): 1738-1742.
- [16] FENG G, CAO S G, REES N W. Stable adaptive control of fuzzy dynamic systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2002, 131(2): 217-224.
- [17] WU S F, GIULICCHI L, FENAL T, et al. Attitude stabilization of LISA Pathfinder spacecraft using colloidal micro-Newton thrusters AIAA-2010-8198 [R]. Reston: AIAA, 2010.
- [18] SONG G, TAO G. A partial-state feedback model reference adaptive control scheme [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(1): 44-57.
- [19] LU M B, LIU L, FENG G. Adaptive tracking control of uncertain Euler-Lagrange systems subject to external disturbances [J]. *Automatica*, 2019, 104: 207-219.
- [20] FRANCO R, RÍOS H, DE LOZA A F, et al. A robust nonlinear model reference adaptive control for disturbed linear systems: An LMI approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, 67(4): 1937-1943.
- [21] 刘伟, 高扬. 空间引力波探测中无拖曳控制方法研究[J]. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2020, 50(7): 112-122.
LIU W, GAO Y. Drag-free control methods for space-based gravitational-wave detection [J]. *Scientia Sinica (Physica, Mechanica & Astronomica)*, 2020, 50(7): 112-122 (in Chinese).
- [22] 马浩君, 韩鹏, 高东, 等. 深空双质量块无拖曳卫星 H_∞ 鲁棒控制器设计[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2021, 53(2): 1-13.
MA H J, HAN P, GAO D, et al. H_∞ robust controller design for deep space drag-free satellite with two test masses [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2021, 53(2): 1-13 (in Chinese).

(责任编辑: 宋金超)

LMI-based output tracking robust drag-free control with model reference adaptive scheme

SUN Xiaoyun^{1,2}, WU Shufan^{1,2,*}, SHEN Qiang^{1,2}

1. School of Aeronautics and Astronautics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China

2. Shanghai Frontier Science Center for Gravitational Wave Detection, Shanghai 200240, China

Abstract: Aiming at the problem of ultra-stable and high precision attitude control of spacecraft platform for the mission of space gravitational wave detection, an enhanced multivariable robust Model Reference Adaptive Control (MRAC) scheme is proposed. To realize the closed-loop robustness of all the output signals, and suppress bounded external disturbances and parametric uncertainties that match the system input, this scheme is applied to the drag-free control loop of detection spacecraft platform. Considering that the system state is uneasy to obtain directly, the design of the MRAC scheme is based on the output feedback and output regulation. To improve the robustness, an adaptive correction term is derived based on solutions to systems of Linear Matrix Inequalities (LMIs) constructed by stability analysis. The Lyapunov analysis verifies the closed-loop stability of each signal, and the numerical simulation verifies the good robustness of the drag-free DOF in the face of nonlinear uncertainties and additional disturbances.

Keywords: output tracking; robust control; model reference adaptive control; drag-free control; space gravitational wave detection

Received: 2022-06-01; **Revised:** 2022-06-20; **Accepted:** 2022-07-23; **Published online:** 2022-07-27 09:03

URL: <https://hkxb.buaa.edu.cn/CN/Y2023/V44/IS1/727654>

Foundation items: National Key Research and Development Program (2020YFC2200800, 2021YFC2202600); Youth Program of National Natural Science Foundation of China (62103275); Natural Science Foundation of Shanghai (20ZR1427000)

* **Corresponding author.** E-mail: shufan.wu@sjtu.edu.cn