



北京航空航天大学学报

Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics

ISSN 1001-5965, CN 11-2625/V

《北京航空航天大学学报》网络首发论文

题目： 基于改进 Kinky Inference 的输出调节自适应无拖曳控制
作者： 孙笑云, 沈强, 吴树范
DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2022.0504
收稿日期: 2022-06-20
网络首发日期: 2023-01-04
引用格式: 孙笑云, 沈强, 吴树范. 基于改进 Kinky Inference 的输出调节自适应无拖曳控制[J/OL]. 北京航空航天大学学报.
<https://doi.org/10.13700/j.bh.1001-5965.2022.0504>



网络首发: 在编辑部工作流程中, 稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定, 且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式(包括网络呈现版式)排版后的稿件, 可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定; 学术研究成果具有创新性、科学性和先进性, 符合编辑部对刊文的录用要求, 不存在学术不端行为及其他侵权行为; 稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准, 正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性, 录用定稿一经发布, 不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容, 只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认: 纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊(光盘版)》电子杂志社有限公司签约, 在《中国学术期刊(网络版)》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版, 以单篇或整期出版形式, 在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊(网络版)》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物(ISSN 2096-4188, CN 11-6037/Z), 所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

基于改进 Kinky Inference 的输出调节自适应无拖曳控制

孙笑云^{1,2}, 沈强^{1,2,✉}, 吴树范^{1,2}

(1 上海市引力波探测前沿科学研究基地, 上海 200240;

2. 上海交通大学航空航天学院, 上海 200240)

*通信作者 E-mail: qiangshen@sjtu.edu.cn

摘要 在空间引力波探测任务中, 航天器内部检验质量因存在载荷硬件噪声、环境噪声及微推力器耦合噪声等复杂干扰, 影响其无拖曳控制精度, 难以实现超净、超稳控制需求。本文提出了一种基于惰性适配 Lipschitz 常数 Kinky Inference (Lazily Adapted Lipschitz Constant Kinky Inference, LACKI)的航天器自适应无拖曳控制方法, 运用监督学习规则实现先验知识不足、样本数据存在损坏时外界干扰的逼近和抑制, 运用基于输出调节的模型参考自适应控制 (Model Reference Adaptive Control, MRAC) 方法实现检验质量精确的无拖曳控制。数值仿真验证了无拖曳控制中敏感轴平动和转动自由度的状态响应性能及 LACKI 规则针对外界干扰的估计效果, 通过与常规线性控制方案的对比, 验证了该 LACKI-MRAC 方案对于提高无拖曳控制精度的有效性。

关键词 监督学习; Lipschitz 估计; 模型参考自适应控制; 无拖曳控制; 输出调节; Kinky Inference

中图分类号 V448.22+.3

文献标志码 A

DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2022.0504

Output regulation adaptive drag-free control with enhanced Kinky Inference

SUN Xiaoyun^{1,2}, SHEN Qiang^{1,2,✉}, WU Shufan^{1,2}

(1. Shanghai Frontiers Science Center of Gravitational Wave Detection, Shanghai 200240, China

2. School of Aeronautics and Astronautics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

*Tel.: 17509171906 E-mail: qiangshen@sjtu.edu.cn

Abstract In the mission of space gravitational wave detection, the internal test masses of the spacecraft have complex disturbances such as load hardware noise, environmental noise and micro-thrust coupling noise, which affects the drag-free control accuracy, and it is difficult to achieve ultra-precision and ultra-stable requirements. In this paper, an adaptive drag-free control method is proposed for spacecraft based on Lazily Adapted Lipschitz Constant Kinky Inference (LACKI) scheme. With LACKI scheme, the disturbance approximation and suppression of non-Lipschitz components are achieved when the empirical data is insufficient, and the model reference adaptive control (MRAC) based on output regulation is applied to precise the drag-free control of test masses. Numerical simulation verifies the state response performance of the translational and rotational degrees of freedom of sensitive axes and the estimation effect of the LACKI rule for random discontinuous disturbances, and the accuracy conclusion of the drag-free control loop is gotten.

Key words supervised learning; Lipschitz estimation; MRAC; drag-free control; output regulation; Kinky Inference

无拖曳控制是航天器平台与其内部以检验质量为主的关键载荷用于保证超高精度相对运动关系的主要控制方法, 为以空间引力波探测等为代表的先进空间探测任务提供超静、超稳的航天器平台^[1]。考虑近地卫星受到的复杂外部及内部干扰等因素, 这些性能指标的满足对航天器平台控制方法的设计

收稿日期: 2022-06-20

基金项目: 科技部重点研发计划“引力波探测”重点专项课题(编号: 2020YFC2200800); 国家自然科学基金项目(编号: 62103275); 上海市自然科学基金面上项目(编号: 20ZR1427000)

Fund: The Key Special Topic of the Ministry of Science and Technology's Major Research and Development Plan "Gravitational Wave Detection"(No. 2020YFC2200800), National Natural Science Foundation of China (No. 62103275), General Project of Shanghai Natural Science Foundation (No. 20ZR1427000)

网络首发时间: 2023-01-04 08:31:11 网络首发地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail//11.2625.v.20230103.1359.001.html>

及控制技术的实现提出极具挑战性的要求^[2]。

当前,针对无拖曳控制问题的研究主要集中于 1) 被动控制^[3-5]; 2) 主动控制^[6-10]两个方面。被动控制即通过设计具有强鲁棒性的控制器提高无拖曳控制各敏感轴控制稳定性,主动控制则针对系统潜在的各类干扰进行识别或估计,提高各自由度抗干扰能力。当前有关无拖曳控制问题的主要研究仍集中于被动控制,如文献[3]基于定量反馈理论,根据性能指标转化成设计准则,在已解耦的无拖曳控制系统中设计控制器以满足不同的性能规范。文献[4]提出一种基于频率分离策略的 H_∞ 混合灵敏度控制方案,在具有科学测量约束的无拖曳卫星中,满足稳定控制需求,实现全频段控制消耗的降低。此外,文献[6-8]也提出了基于模型参考自适应控制(MRAC)的无拖曳控制方法,所设计的基于状态反馈的控制器确保了无拖曳控制各通道的控制精度;文献[9]则设计自适应模糊 PID 控制方案,实现具有非线性不确定性时无拖曳卫星的在轨精确控制。

在主动控制问题中,针对复杂扰动抑制问题,设计干扰观测器并在控制器引入反馈是较为普遍的解决方案。当前,扰动观测器的设计方法主要基于 1) 模型^[10-14]2) 数据^[15-17]。基于模型的扰动观测器往往建立于系统状态可观可测前提,该方案也较为普遍的运用于故障检测与容错控制系统设计中,如文献[10]利用固定时间观测器解决无拖曳卫星中作为惯性基准的空间惯性传感外源性扰动补偿,文献[11-12]则基于自适应补偿思想解决无拖曳卫星执行器故障的容错控制问题。基于数据的干扰观测多基于样本先验知识,依赖于样本数据的准确性,运用监督学习方法或数据优化策略实现不确定干扰或模型整体的逼近和预测。文献[15]提出一种基于 Kinky Inference 的监督学习方法,在已知样本先验知识的前提下,基于 Lipschitz 常数估计实现连续未知模型的估计,通过改进迭代规则实现样本数据少且可能存在数据损坏时的模型预测,推导其通用逼近保证,在基于反步法的控制系统中验证该方法的有效性。

本文以空间引力波探测航天器^[18]为研究对象,设计一种基于惰性适配 Lipschitz 常数 Kinky Inference (LACKI) 的输出调节自适应无拖曳控制系统,创新点如下:

(1) 利用基于输出调节的多变量模型参考自适应控制(MRAC)方法实现各敏感轴自由度的精确与稳定控制,在应对非线性不确定性时,提高了系统对各通道解耦的参考模型的自适应逼近能力。该非线性控制方案为在空间引力波探测无拖曳控制系统中的创新应用,有别于既往线性鲁棒控制方法,通过对非线性模型参数逼近实现系统的稳定跟踪;

(2) 基于 LACKI 规则实现低轨卫星运行时外界复杂扰动的预测及反馈,解决了传统意义下基于模型状态设计观测器时,附加干扰需假设有界并满足 Lipschitz 一致性条件的局限性,同时将 LACKI 规则实现的干扰估计器应用于自适应控制系统干扰反馈,基于 Lyapunov 方法及收缩映射原理证明各闭环信号的渐进收敛性。

1 问题描述

以 LISA Pathfinder 科学探测任务航天器为样例建立无拖曳控制系统动力学模型。执行探测任务的航天器构造如图所示,由两个对置的惯性质量块 TM1、TM2 及航天器自身构成三个相互关联的物理实体。根据文献[18-20],其多体动力学方程描述为:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{r}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{r}_2 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -T_{1B} & T_{1B}\tilde{r}_{o1} & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -T_{1B} & 0 & E & 0 & 0 \\ -T_{2B} & T_{2B}\tilde{r}_{o2} & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & -T_{2B} & 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \alpha \\ a_1 \\ \alpha_1 \\ a_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

式中, $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, a, a_1, a_2$ 为航天器绝对运动及检验质量相对运动加速度, φ 为航天器绝对运动姿态角, $r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2$ 为检验质量相对运动位移与姿态, $\tilde{r}_{o1}, \tilde{r}_{o2}$ 为由 $r_{o1} = [r_{o1,x}, r_{o1,y}, r_{o1,z}]^T, r_{o2} = [r_{o2,x}, r_{o2,y}, r_{o2,z}]^T$ 定义的斜对

称交叉矩阵, 表述为

$$\tilde{r}_{o1} = \begin{bmatrix} 0 & -r_{o1,z} & r_{o1,y} \\ r_{o1,z} & 0 & -r_{o1,x} \\ -r_{o1,y} & r_{o1,x} & 0 \end{bmatrix}, \tilde{r}_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & -r_{o2,z} & r_{o2,y} \\ r_{o2,z} & 0 & -r_{o2,x} \\ -r_{o2,y} & r_{o2,x} & 0 \end{bmatrix}$$

T_{1B}, T_{2B} 为在标称位置下, 航天器主体到检验质量块的变换矩阵。航天器和检验质量加速度则重新定义为:

$$\alpha = I^{-1}t, \alpha_1 = I_1^{-1}t_1, \alpha_2 = I_2^{-1}t_2$$

$$a = \frac{1}{m}f, a_1 = \frac{1}{m_1}f_1, a_2 = \frac{1}{m_2}f_2$$

m_1, m_2, I, I_1, I_2 分别为航天器及 TM 的质量及转动惯量, t, t_1, t_2, f, f_1, f_2 为分别作用于各物理实体上的合外力矩和合外力。

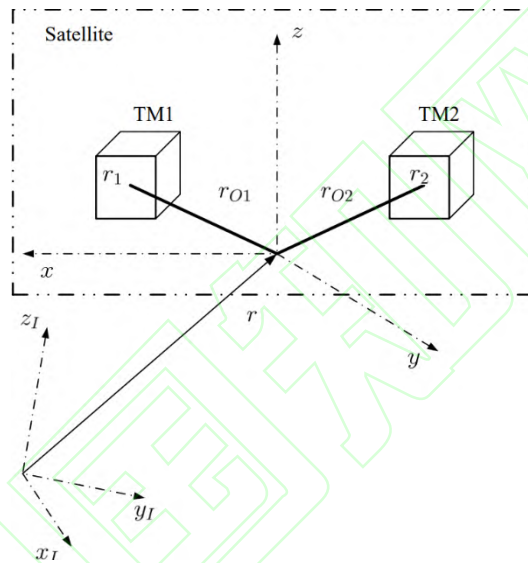


图 1 LISA Pathfinder 航天器构型^[10]
Fig.1 LISA Pathfinder satellite configuration [10]

根据 LISA Pathfinder 任务规则^[18], 在执行科学探测模式 1 (或称测试模式 M3) 时, 选取检验质量 1 的 3 个平动自由度、1 个转动自由度及检验质量 2 的两个平动自由度施行无拖曳控制, 其余六个自由度则施行静电悬浮控制。根据文献[20]给出的坐标选择矩阵 D_{DF}, D_{SUS} , 将无拖曳系统动力学模型重新表述为:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{q}_{DF} \\ \ddot{q}_{SUS} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{ATT} & 0 \\ D_{DF}B_1 & D_{DF}B_2 \\ D_{SUS}B_1 & D_{SUS}B_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_{SC} \\ a_{TM} \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中, q_{DF}, q_{SUS} 分别为无拖曳控制与静电悬浮控制坐标, $q_{DF} = D_{DF}q, q_{SUS} = D_{SUS}q$, $q = [r_1^T, \phi_1^T, r_2^T, \phi_2^T]^T$ 为两检验质量的绝对运动坐标。 B_1, B_2, B_{ATT} 为更紧凑的参数矩阵, 定义为:

$$B_{ATT} = [0 \quad E], B_1 = \begin{bmatrix} -T_{1B} & T_{1B}\tilde{r}_{o1} \\ 0 & -T_{1B} \\ -T_{2B} & T_{2B}\tilde{r}_{o2} \\ 0 & -T_{2B} \end{bmatrix}, B_2 = E$$

a_{SC}, a_{TM} 则分别为航天器与质量块所受合外力及力矩, $a_{SC} = (a^T \quad \alpha^T)^T, a_{TM} = (a_1^T \quad \alpha_1^T \quad a_2^T \quad \alpha_2^T)^T$ 。认

为合外力及力矩由控制器输入 u_T, u_S 、外界干扰 d_{SC}, d_{TM} 及 TM 刚度变形构成，将系统开环动力学最终表达为：

$$\begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{q}_{DF} \\ \ddot{q}_{SUS} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{ATT} & 0 & 0 \\ B_{DF} & E & 0 \\ B_{SUS} & 0 & E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_T \\ u_{S1} \\ u_{S2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{SC} \\ d_{TM1} \\ d_{TM2} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_{DF}^2 & 0 \\ 0 & -\Omega_C^2 & -\Omega_{SUS}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ q_{DF} \\ q_{SUS} \end{pmatrix}$$

式中， $B_{DF} = D_{DF} B_1, B_{SUS} = D_{SUS} B_1$ ，控制器输入 $u_{S1} = D_{DF} B_2 u_S, u_{S2} = D_{SUS} B_2 u_S$ ，无拖曳系统输入噪声。对角矩阵 $\Omega_{DF}^2, \Omega_{SUS}^2$ 与交叉耦合矩阵 Ω_C^2 为刚度矩阵。仅针对无拖曳控制回路进行分析，定义状态量 $x = [q_{DF}, \dot{q}_{DF}]^T$ ，则计及干扰的无拖曳控制回路标准形式可表述为：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(u_T + d_{TM}) \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (4)$$

式中， $d_{TM} = B^{-1}(u_{S1} + d_{TM1}) + d_{SC}$ 为系统总噪声， A, B, C 为系统状态参数矩阵， $A = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -\Omega_{DF}^2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{DF} \end{bmatrix}$ ，认为 B, C 已知， A 慢时变， y 为输出，由此给出无拖曳控制系统 (4) 的频域输入输出描述：

$$y(t) = G(s)[u](t), G(s) = C(sI - A)^{-1} B \quad (5)$$

式中， $u(t) = u_T(t) + d_{TM}(t)$ ， B^{-1} 在 B 非满秩时认为是其伪逆。 $y(t) = G(s)[u](t)$ 则为一种结合时域和频域信号运算的简单符号^[7]。给出如下引理^[13]：

引理 1.1：对于任何 $M \times M$ 严格适当和满秩有理矩阵 $G(s)$ ，存在下三角多项式矩阵 $\xi_m(s)$ ，定义为 $G(s)$ 的修正左相互作用矩阵，形式为

$$\xi_m(s) = \begin{bmatrix} d_1(s) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_{21}^m(s) & d_2(s) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{M1}^m(s) & \dots & \dots & h_{MM-1}^m(s) & d_M(s) \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中 $h_{ij}^m(s), j=1, \dots, M-1, i=2, \dots, M$ 是多项式，并且 $d_i(s), i=1, \dots, M$ 是 $l_i > 0$ 次的单调稳定多项式，使得 $G(s)$ 的高频增益矩阵，定义为 $K_p = \lim_{s \rightarrow \infty} \xi_m(s) G(s)$ ，是有限的和非奇异的。给出如下假设：

假设 1.1： $G(s) = C(sI - A)^{-1} B$ 的所有零点都是稳定的，且 (A, B, C) 是稳定、可检测的。

假设 1.2： $G(s)$ 满秩且其修正左相互作用矩阵 ξ_m 是已知的。

2 LACKI 规则描述

赋予输入空间 X 伪度量 $\partial: X^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ，同时向输出空间 Y 赋予一个平移不变的伪度量 $\partial_y: Y^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 。在具有 Lipschitz 常数 L 的 Lipschitz 连续函数集 $Lip(L)$ 中，定义 $f \in Lip(L^*)$ 是具有最小 Lipschitz 常数 L^* 的连续函数，并将 $f: X \rightarrow Y$ 选取为监督学习规则的目标函数。

考虑增量学习规则，即随着时间的推移实现样本 f 数据可用性的提升。在初始的 $n \in N$ 个时间步长内，认为可供访问的先验样本数据集 $D_n := \{(s_i, \tilde{f}_i) | i=1, \dots, N_n\}$ 中包含目标函数 f 在样本输入 $s_i \in X$ 处的 $N_n \in N$ 个样本值 $\tilde{f}_i \in Y$ ，并假设认为该 N_n 个样本存在数据损坏的可能性。在上述的采样函数值中，

允许具有由误差函数给出的观测误差 $e: X \rightarrow Y$ ，在实际系统中往往来源于量测噪声或系统误差。也就是说，我们假设 $\partial_y(\tilde{f}_i, f(s_i)) \leq \partial_y(0, e(s_i))$ 。

定义可用数据集 $D_n = (G_n, Y_n)$ ，其中 $G_n = \{s_i | i=1, \dots, N_n\} \subset X$ 为样本输入的集合（或序列）， $Y_n = \{\tilde{f}_i | i=1, \dots, N_n\} \subset Y$ 为输出序列。学习目标函数 f 的过程可表达为利用可用数据 D_n 来推断 $x \in G_n$ 处 $f(x)$ 的预测值 $\hat{f}_n(x)$ ，即设计学习规则或推理过程，用于构造估计器 \hat{f}_n 。根据文献[16]。首先给出下述基于非参数回归的 Kinky Inference (KI) 学习规则：

定义 2.1 (KI 规则)^[17]：对于给定已知样本集 D_n ，通过超参数 $\Xi(n)$ 赋予一个输入空间伪度量 $\tilde{\partial}(\cdot, \cdot; \Xi(n)): X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 。定义如下 KI 预测器：

$$\hat{f}_n(x; \Xi(n), D_n) := \frac{1}{2} u_n(x; \Xi(n)) + \frac{1}{2} l_n(x; \Xi(n)) \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} u_n(\cdot; \Xi(n)), l_n(\cdot; \Xi(n)) &: X \rightarrow \mathbb{R}^m \\ u_n(\cdot; \Xi(n)) &= \min_{i=1, \dots, N_n} \tilde{f}_i + \tilde{\partial}(x, s_i; \Xi(n)) \\ l_n(\cdot; \Xi(n)) &= \max_{i=1, \dots, N_n} \tilde{f}_i - \tilde{\partial}(x, s_i; \Xi(n)) \end{aligned}$$

即可认为通过 $\hat{f}_n(\cdot; \Xi(n), D_n): X \rightarrow Y$ ，对输出函数值进行推断。特别的，当选择

$$\tilde{\partial}(x_1, x_2; \Xi(n)) = L(n) \|x_1 - x_2\| \quad (8)$$

时，该规则即为 Lipschitz 插值的一般过程。此时，超参数 $\Xi(n) = L(n)$ 是目标假设 Lipschitz 常数。根据文献[17]可知，预测变量 $\hat{f}_n(\cdot; L(n), D_n)$ 是 Lipschitz 连续的，且具有 Lipschitz 常数 $L(n)$ 。通常，假设该常数是先验已知的或根据数据估计的。

与内核学习类似，通过允许伪度量的规范提供的通用性，使得学习规则能够支持自动相关性的确定，可以通过数据驱动手段对超参数实现自适应的调整。同时，为进一步探讨该非参数回归过程对预测器性能及观测噪声的影响，做下述简化的假设：

假设 2.1：假设输出 m 维范数空间 $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ ，其伪度量满足 $\partial_y(y, y') = \|y - y'\|_\infty, \forall y, y' \in Y$ 。

假设 2.2：假设输入 d 维范数空间 $X \subseteq \mathbb{R}^d$ ，其伪度量满足 $\partial_x(x, x') = \|x - x'\|_\infty, \forall x, x' \in X$ 。

假设 2.3：观测误差有界， $\bar{e} := \sup_{x \in X} \|e(x)\|_\infty$ 。

在这些简化假设下，容易得到系统内部存在由量测或其他干扰引起的误差时，输出空间伪度量满足 $\partial_y(\tilde{f}_i, f(s_i)) \leq \partial_y(0, e(s_i))$ 。为实现 Lipschitz 常数 $L(n)$ 的自适应迭代更新，给出下述惰性自适应 Lipschitz 常数纠缠推理 (LACKI) 学习规则定义：

定义 2.2 (LACKI 规则)：LACKI 规则在预测器的计算中仍沿用基本 KI 规则，即根据式(8)计算预测器 \hat{f}_n ，但对伪度量具有如下定义：

$$\tilde{\partial}(x, x'; L(n)) = L(n) \partial(x, x') \quad (9)$$

Lipschitz 常数 $L(n)$ 由样本数据更新得到，设置

$$L(n) := \max \left\{ 0, \max_{(s, s') \in U_n} \frac{\|\tilde{f}(s) - \tilde{f}(s')\|_\infty - \lambda}{\|s - s'\|_\infty} \right\} \quad (10)$$

其中 $\lambda \geq 0$ 是超参数，通常用于补偿因误差造成的预测器漂移。同时，对于输入集合 $S, S' \subset X$ ，定义 $U(S, S') := \{(s, s') \in S \times S' | \|s - s'\|_\infty > 0\}$ ， $U_n := U(G_n, G_n)$ 是所有不同样本输入对的集合。根据文献[15]，当选取 $\lambda \geq 2\bar{e}$ 时，可以保证防止 $L(n)$ 随着 n 的增长而发散。作为预测器的 Lipschitz 常数， $L(n)$ 的有界性可

以使预测器消除观测噪声。如果 $\bar{\varepsilon}$ 已知，通常会选择超参数 $\lambda := 2\bar{\varepsilon}$ 。

为实现 Lipschitz 常数 $L(n)$ 的在线学习，运用增量学习实现第 n 个步长下的 $L(n)$ 向第 $n+1$ 个步长下的 $L(n+1)$ 的迭代，使得第 $n+1$ 个步长下的样本数量 $G_{n+1} = G_n \cup \{s_{n+1}\}, \forall n$ 。对于 $n \in N$ 及 $L(0) := 0$ 。归纳定义下述增量更新规则：

$$L(n+1) = \max \left\{ L(n), \max_{(s,s') \in U(G_n, \{s_{n+1}\})} \frac{\|\tilde{f}(s) - \tilde{f}(s')\|_{\infty} - \lambda}{\|s - s'\|_{\infty}} \right\} \quad (11)$$

式 (7)，(8) 与式 (10)，(11) 构成完整的 LACKI 规则算法。根据文献[15]，给出下述该规则下预测器 \hat{f}_n 预测误差一致有界性及在线可学习性的定理：

定理 2.1 (一致有界性)： 给定了一个样本序列 $(D_n)_{n \in N}$ ，其存在上界为 $\bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 的观测误差。对任意的 $q > 0$ ，LACKI 规则的超参数设置为 $\lambda := 2\bar{\varepsilon} + q$ 。定义一个紧集 $I \subseteq X$ ，则认为 LACKI 规则是以下意义上的通用逼近器：如果输入样本序列 $(G_n)_{n \in N}$ 一致收敛到 $I \subseteq X$ ，那么由 LACKI 规则计算得出的预测变量序列 $(\hat{f}_n)_{n \in N}$ 将一致地收敛到任何连续目标函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ，其预测误差上界为 $2\bar{\varepsilon} + 1.5q$ 。

定理 2.2 (非连续函数可学习性扩展)： 仍然按照定理 2.1，将超参数设置为 $\lambda := 2\bar{\varepsilon} + q$ 。目标函数 f 由待估计的 Lipschitz 连续项和一个存在上界 \bar{E}_h 的余项构成，表达为 $f = \phi + \psi$ ，其中 $\phi = \text{Lip}(L^*)$ ， $\sup_X \|\psi(x)\|_{\infty} \leq \bar{E}_h \in \mathbb{R}$ 。给定了一个有界输入的轨迹 $(x_n)_{n \in N}$ ，即对于某些 $\beta \in \mathbb{R}_+$ 和所有 $n \in N$ ， $\|x_n\|_{\infty} \leq \beta$ 。根据增量学习规则， $n+1$ 时刻的样本序列 $D_{n+1} = D_n \cup \{x_n, f(x_n)\}$ ，满足样本一致性和 Lipschitz 连续性，序列的预测误差存在上界，表达为：

$$\|\hat{f}_n(x_n) - f(x_n)\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left[0, \frac{q}{2} + 2\bar{\varepsilon} + 2\bar{E}_h \right] \quad (12)$$

本文将利用上述定义和定理展开控制器的设计与分析过程。

3 基于 LACKI-MRAC 的输出调节无拖曳控制系统设计

本节将基于 LACKI 规则逼近外界扰动，用于控制反馈，引入基于多变量 MRAC 的输出反馈控制器，完成无拖曳控制系统的设计。

3.1 控制结构

为实现非连续有界外界扰动的逼近与反馈，提高系统抗干扰能力，引入基于 LACKI 规则的干扰观测器并用于控制反馈；同时，为实现无拖曳系统的精确控制，在确保系统快速稳定的前提下实现检验质量对指令的精确跟踪，需要在放宽稳定裕度前提下提高系统响应快速性。同时，由于全部系统状态难以直接获得，由此考虑引入基于输出调节的多变量的参考模型自适应 (MRAC) 方法，实现多变量无拖曳控制系统的稳定闭环控制。控制结构如图 2 所示。

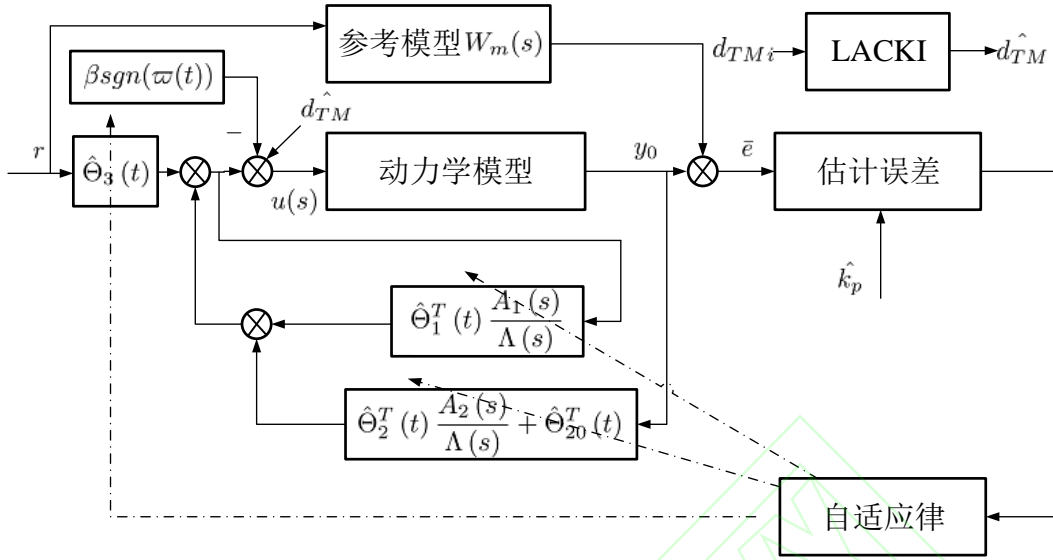


图2 控制结构
Fig.2 Control framework

利用系统输出 $y(t) = Cx(t)$ 首先观测系统状态，并基于观测状态设计反馈控制结构。给出包含干扰反馈的输出调节反馈控制律：

$$u_r(t) = K_1^{*T} \hat{x}(t) + K_2^* r(t) - \hat{d}_{TM} \quad (13)$$

中， K_1^*, K_2^* 为观测状态 $\hat{x}(t)$ 及参考模型输入 $r(t)$ 的反馈增益，该反馈控制设计目的是使控制对象跟踪参考模型

$$y_m(t) = W_m(s)[r](t), W_m(s) = \xi^{-1}(s) \quad (14)$$

其中 y_m 为参考输出，同时抑制外界干扰。引入变换矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，使得 $CP^{-1} = [I_{n_0} \ 0]$ 且 $n_0 = \text{rank}[C]$ ，从而将系统状态方程转换为 $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u_r(t)$ ， $\bar{A} = PAP^{-1}, \bar{B} = PB$ 。将系统全状态方程表述为：

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} [u_r + d_{TM}](t) \quad (15)$$

其中， $\bar{x}(t) = Px(t) = [\bar{x}_1^T(t) \ \bar{x}_2^T(t)]^T$ 。根据文献[14]，容易得知当 (A, C) 可观测时， $(\bar{A}_{22}, \bar{A}_{12})$ 也可观测。

由此，全状态观测器表达为：

$$\hat{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ w(t) + L_r y(t) \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中， $\hat{\bar{x}}_1(t), \hat{\bar{x}}_2(t)$ 为各状态的观测值， $L_r \in \mathbb{R}^{(n-n_0) \times n_0}$ 为恒定增益矩阵，用于保证特征值矩阵 $\bar{A}_{22} - L_r \bar{A}_{12}$ 稳定，根据观测器设计结果，可将 $w(t) \in \mathbb{R}^{n-n_0}$ 由下述方程表达为：

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) = & (\bar{A}_{22} - L_r \bar{A}_{12}) w(t) + (\bar{B}_2 - L_r \bar{B}_1) [u_r + d_{TM}](t) \\ & + ((\bar{A}_{22} - L_r \bar{A}_{12}) L_r + \bar{A}_{21} - L_r \bar{A}_{11}) y(t) \end{aligned} \quad (17)$$

上述状态观测器的设计中，存在 $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} P^{-1} (\bar{x}(t) - \hat{\bar{x}}(t)) = 0$ ，观测误差实现收敛。利用式(16)求解 $w(t)$ ，容易得到

$$w(t) = \varepsilon_0(t) + \frac{N_1(s)}{\Lambda(s)}[u_T + d_{TM}](t) + \frac{N_2(s)}{\Lambda(s)}[y](t) \quad (18)$$

式中, $\varepsilon_0(t) = e^{(\bar{A}_{22} - L_r \bar{A}_{12})t} w(0)$ 代表由初值引发的误差影响, $w(0)$ 为 $L_r y(0) - \bar{x}_2(0)$ 的估计, $\Lambda(s) = \det(sI - \bar{A}_{22} + L_r \bar{A}_{12})$ 。由于干扰 d_{TM} 不真实可知, 由此将控制器的状态反馈部分表达为:

$$\begin{aligned} K_1^{*T} \hat{x}(t) = & \Theta_1^{*T} \frac{A_1(s)}{\Lambda(s)} [u_T + \hat{d}_{TM}](t) + \Theta_{20}^{*T} y(t) \\ & + \Theta_2^{*T} \frac{A_2(s)}{\Lambda(s)} [y](t) + K_{p2}^* e^{(\bar{A}_{22} - L_r \bar{A}_{12})t} w(0) \end{aligned} \quad (19)$$

式中, $\Theta_1^* \in \mathbb{R}^{M(n-n_0) \times M}$, $\Theta_2^* \in \mathbb{R}^{n_0(n-n_0) \times M}$, $\Theta_{20}^* \in \mathbb{R}^{n_0 \times M}$, $\Theta_3^* \in \mathbb{R}^{M \times M}$,

$\Theta_{20}^{*T} = K_{p1}^* + K_{p2}^* L_r$, $K_{p2}^* N_1(s) = \Theta_1^{*T} A_1(s)$, $K_{p2}^* N_2(s) = \Theta_2^{*T} A_2(s)$,

$K_1^{*T} P^{-1} = [K_{p1}^* \quad K_{p2}^*]$, $K_{p1}^* \in \mathbb{R}^{M \times n_0}$, $K_{p2}^* \in \mathbb{R}^{M \times (n-n_0)}$,

$A_1(s) = [I_M, sI_M, \dots, s^{n-n_0-1} I_M]^T$, $A_2(s) = [I_{n_0}, sI_{n_0}, \dots, s^{n-n_0-1} I_{n_0}]^T$

。 \hat{d}_{TM} 即为由 LACKI 规则得到的干扰估计, 认为外界干扰 d_{TM} 在离散时间系统内具有如下表述:

$$d_{TM}(k) = f(d_{TM}(k-1), \dots, d_{TM}(k-n_d)) \quad (20)$$

令

$$s_m = [d_{TM}(m-1), \dots, d_{TM}(m-n_d)]^T, m > n_d$$

$$s_n = [d_{TM}(n-1), \dots, d_{TM}(n-n_d)]^T, n > n_d$$

为先验输入对 U_k 中的任意一对元素, 则基于 LACKI 规则实现的干扰 d_{TM} 估计 \hat{d}_{TM} 可表述为:

$$\begin{aligned} \hat{d}_{TM}(k) &= \frac{1}{2} u_k(\bar{d}; \Xi(k)) + \frac{1}{2} l_k(\bar{d}; \Xi(k)), \\ u_k(\cdot; \Xi(k)) &= \min_{i=1, \dots, k-1} \tilde{f}_i + L(k) \|\bar{d} - s_i\|, \\ l_k(\cdot; \Xi(k)) &= \max_{i=1, \dots, k-1} \tilde{f}_i - L(k) \|\bar{d} - s_i\|, \\ L(0) &:= 0, \\ L(k+1) &= \max \left\{ L(k), \max_{(s_m, s_n) \in U(G_k, \{s_{k+1}\})} \frac{\|\tilde{f}(s_m) - \tilde{f}(s_n)\|_\infty - \lambda}{\|s_m - s_n\|_\infty} \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

其中, \bar{d} 为第 k 个步长下目标函数 $f: d_{TM}(k-1), \dots, d_{TM}(k-n_d) \rightarrow d_{TM}(k)$ 的输入, $\bar{d} = d_{TM}(k-1), \dots, d_{TM}(k-n_d)$, s_i 为样本空间的第 i 个输入, $\tilde{f}(\cdot)$ 为样本输出。根据定理 2.2, 观测误差 $\tilde{d}_{TM} = d_{TM} - \hat{d}_{TM}$ 不依赖于标称输出反馈, 在 d_{TM} 非 Lipschitz 情况下仍然保证有界, 并给出其估计误差上界 $\|\tilde{d}_{TM}\| \leq \bar{d}_0$ 。

基于上述推导与 $\Theta_3^* = K_2^*$, 并忽略指数衰减项 $K_{p2}^* e^{(\bar{A}_{22} - L_r \bar{A}_{12})t} w(0)$, 可以得到含有部分状态观测误差的参数化标称部分状态反馈控制器表述:

$$u_T = \Theta_1^{*T} \hat{\omega}_1(t) + \Theta_2^{*T} \hat{\omega}_2(t) + \Theta_{20}^{*T} y(t) + \Theta_3^* r(t) - \hat{d}_{TM} \quad (22)$$

其中,

$$\hat{\omega}_1(t) = \frac{A_1(s)}{\Lambda(s)} [u_T + \hat{d}_{TM}](t), \hat{\omega}_2(t) = \frac{A_2(s)}{\Lambda(s)} [y](t)$$

3.2 自适应律设计

在进行自适应律设计之前, 首先探讨模型的输出匹配条件, 即自适应律的存在性。文献[20]中已

针对基于输出反馈控制器的对象模型输出匹配性做出探讨及证明, 即认为由输出反馈推导得到的观测状态反馈控制器 $u(t) = K_1^{*T} \hat{x}(t) + K_2^* r(t)$ 中, 标称控制器参数 K_1^* 和 K_2^* 满足匹配条件

$$C(sI - A - BK_1^{*T})^{-1} BK_2^* = W_m(s), K_2^{*-1} = K_p \quad (23)$$

时, 能够确保模型输出匹配

$$e(t) = y(t) - y_m(t),$$

$e(t)$ 在任何初始条件下都能指数收敛至 0, 且闭环信号 $y(t)$ 有界。

自适应控制方案的引入旨在解决系统状态参数矩阵 (A, B, C) 未知的问题。考虑时域模型中对三个状态矩阵的自适应估计会进一步增大自适应更新律的设计难度, 在频域内对高频增益矩阵 K_p 进行 LDS 分解, 从而简化自适应逼近过程, 降低控制器设计难度。给出如下假设^[14]:

假设 3.1: 高频矩阵 K_p 的所有顺序主子式 $\Delta_i, i=1, 2, \dots, M$ 都是非零的, 并且它们的符号已知。这样的 K_p 具有非唯一的 LDS 矩阵分解:

$$K_p = L_s D_s S \quad (24)$$

其中, $S = S^T > 0, L_s$ 是一个单位上三角矩阵, $D_s = \text{diag}[s_1^*, \dots, s_M^*] = \text{diag}[\text{sgn}[d_1^*] \gamma_1, \dots, \text{sgn}[d_M^*] \gamma_M]$ 具有任意和选定的常数 $\gamma_i > 0, i=1, 2, \dots, M$ 。

将输出调节控制的自适应版本表述为:

$$\begin{aligned} u_T = & \hat{\Theta}_1^T(t) \frac{A_1(s)}{\Lambda(s)} [u_T + \hat{d}_{TM}](t) + \hat{\Theta}_3(t) r(t) \\ & + \left(\hat{\Theta}_2^T(t) \frac{A_2(s)}{\Lambda(s)} + \hat{\Theta}_{20}^T(t) \right) y(t) - \hat{d}_{TM} - \beta \text{sgn}(\varpi) \end{aligned} \quad (25)$$

其中 $\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \hat{\Theta}_{20}, \hat{\Theta}_3$ 分别为 $\Theta_1^*, \Theta_2^*, \Theta_{20}^*, \Theta_3^*$ 的自适应估计, β 为符号已知的系数, ϖ 为在式 (31) 中定义的系统估计误差。将输出误差跟踪方程表述为:

$$\begin{aligned} e(t) = & y(t) - y_m(t) \\ = & W_m(s) K_p [-\Theta^{*T} \hat{\omega} + \tilde{d}_{TM} - \beta \text{sgn}(\varpi)](t) \end{aligned} \quad (26)$$

式中, $\hat{\omega}(t) = [\hat{\omega}_1^T(t), \hat{\omega}_2^T(t), y^T(t), r^T(t)]^T$, 相应的, $\Theta^* = [\Theta_1^{*T}, \Theta_2^{*T}, \Theta_{20}^{*T}, \Theta_3^{*T}]^T$ 。

利用高频增益矩阵 K_p 的 LDS 分解对该跟踪误差各自适应变量实现参数化求解, 同时根据式 (25), 将等式改写为:

$$\begin{aligned} e(t) = & \xi_m^{-1}(s) L_s D_s S \left((\hat{\Theta}^T - \Theta^{*T}) \hat{\omega}(t) \right. \\ & \left. + \tilde{d}_{TM} - \beta \text{sgn}(\varpi) \right) \end{aligned} \quad (27)$$

式中, $\hat{\Theta}^T = [\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \hat{\Theta}_{20}, \hat{\Theta}_3]^T$ 。为将未知单位上三角矩阵 L_s 参数化, 引入一个常数矩阵 $\Theta_0^* = L_s^{-1} - I = \{\theta_{ij}^*\}$, 其中 $\theta_{ij}^* = 0, i=1, 2, \dots, M, j \geq i$, 同时定义参数矩阵估计误差变量 $\tilde{\Theta}(t) = \Theta(t) - \Theta^*(t)$, 将上式进一步改写为:

$$\begin{aligned} & \xi_m(s) [e](t) + \Theta_0^* \xi_m(s) [e](t) \\ = & D_s S \left(\tilde{\Theta}^T(t) \hat{\omega}(t) + \tilde{d}_{TM} - \beta \text{sgn}(\varpi) \right) \end{aligned} \quad (28)$$

进一步将该方程进行参数化, 引入一个稳定的单项多项式 $f(s)$, 其次数等于左相互作用矩阵 $\xi_m(s)$ 的最大次数。利用滤波器 $h(s) = 1/f(s)$ 对估计误差方程进行修正, 将等式表述为:

$$\begin{aligned} & \xi_m(s)h(s)[e](t) + \Theta_0^* \xi_m(s)h(s)[e](t) \\ & = D_s S h(s) [\tilde{\Theta}^T \hat{\omega} + \tilde{d}_{TM} - \beta \operatorname{sgn}(\varpi)](t) \end{aligned} \quad (29)$$

令

$$\begin{aligned} \bar{e}(t) & = \xi_m(s)h(s)[e](t) = [\bar{e}_1(t), \dots, \bar{e}_M(t)]^T \\ \eta_i(t) & = [\bar{e}_1(t), \dots, \bar{e}_{i-1}(t)]^T \in \mathbb{R}^{i-1}, i = 2, \dots, M, \\ \theta_i^* & = [\theta_{i1}^*, \dots, \theta_{ii-1}^*]^T, i = 2, \dots, M \end{aligned} \quad (30)$$

则等式进一步改写为

$$\begin{aligned} \varpi(t) & = [0, \hat{\theta}_2^T \eta_2(t), \hat{\theta}_3^T \eta_3(t), \dots, \hat{\theta}_M^T \eta_M(t)]^T \\ & \quad + \hat{\Psi}(t) (\hat{\Theta}^T(t) h(s) [\hat{\omega}](t) - h(s) [\hat{\Theta}^T \hat{\omega}](t)) + \bar{e}(t) \end{aligned} \quad (31)$$

式中, $\hat{\theta}_i(t), i = 2, \dots, M, \hat{\Psi}(t)$ 分别为 L_s 及 $D_s S$ 参数矩阵的自适应估计。利用 $h(s) = 1/f(s)$ 对上式进一步化简, 以得到参数估计误差及系统跟踪误差的线性形式, 从而用于自适应律更新, 对估计误差进行下述推导, 表述为:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_i(t) & = -\frac{\Gamma_{\theta_i} \varpi(t) \eta_i(t)}{m^{*2}(t)}, i = 2, 3, \dots, M, \\ \dot{\hat{\Theta}}^T(t) & = -\frac{D_s \varpi(t) [h(s) [\hat{\omega}]]^T(t)}{m^{*2}(t)}, \\ \dot{\hat{\Psi}}(t) & = -\frac{\Gamma_{\Psi} \varpi(t) [[\hat{\Theta}^T] h(s) [\hat{\omega}] - h(s) [\hat{\Theta}^T \hat{\omega}]]^T(t)}{m^{*2}(t)} \end{aligned} \quad (32)$$

式中, $\Gamma_{\theta_i}, \Gamma_{\Psi}$ 为自适应增益矩阵, 满足 $\Gamma = \Gamma^T > 0$, 同时有

$$\begin{aligned} m^{*2}(t) & = 1 + \sum_{i=2}^M \eta_i^T(t) \eta_i(t) + [h(s) [\hat{\omega}]]^T(t) [h(s) [\hat{\omega}]](t) \\ & \quad + [[\hat{\Theta}^T] h(s) [\hat{\omega}] - h(s) [\hat{\Theta}^T \hat{\omega}]]^T(t) \\ & \quad \times [[\hat{\Theta}^T] h(s) [\hat{\omega}] - h(s) [\hat{\Theta}^T \hat{\omega}]](t) \end{aligned}$$

3.3 稳定性分析

基于 LACKI 规则的预测误差有界性, 基于标称控制系统, 在连续时间系统内首先证明各闭环信号有界性; 随后根据 LACKI 规则的通用逼近保证与在线可学习性, 在离散时间系统内分析闭环系统收敛性。给出下述定理:

定理 3.1: 以输出反馈控制器 (25), 自适应律 (32) 及被控对象 (4) 构成的无拖曳闭环控制系统, 保证各闭环信号有界。

证明: 首先设计 Lyapunov 函数验证基于自适应律设计的参数估计有界性。定义 Lyapunov 函数如下:

$$V = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=2}^M \tilde{\theta}_i^T(t) \Gamma_{\theta_i}^{-1} \tilde{\theta}_i + \operatorname{tr} [\tilde{\Psi}^T \Gamma_{\Psi}^{-1} \tilde{\Psi}] + \operatorname{tr} [\tilde{\Theta} S \tilde{\Theta}^T] \right) \quad (33)$$

对等式两边求取一阶微分, 得到:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= -\sum_{i=2}^M \frac{\tilde{\theta}_i^T \varpi_i(t) \eta_i(t)}{m^2(t)} - \frac{[h(s)[\hat{\omega}]]^T(t) \tilde{\Theta} S D_s \varpi(t)}{m^2(t)} \\
&\quad - \frac{[[\hat{\Theta}^T] h(s)[\hat{\omega}] - h(s)[\hat{\Theta}^T \hat{\omega}]]^T \tilde{\Psi}^T \varpi(t)}{m^2(t)} \\
&= -\frac{\varpi^T(t) \varpi(t)}{m^2(t)} + \frac{D_s S h(s) [\tilde{d}_{TM}]}{m^2(t)} \varpi(t) \\
&\quad + \frac{D_s S h(s) \beta \operatorname{sgn}(\varpi(t)) \varpi(t)}{m^2(t)}
\end{aligned} \tag{34}$$

由于 $D_s S h(s) \beta$ 符号确定, 则当 $|\beta| \geq \bar{d}_0$ 时,

$$\dot{V} \leq -\frac{\varpi^T(t) \varpi(t)}{m^2(t)} \leq 0 \tag{35}$$

则容易得到各自适应估计参数一致收敛。根据文献[14]中对各估计误差收敛性向系统输出误差收敛性的推导分析, 也能得到闭环系统内各信号的一致稳定性。□

定理 3.2: 仍然选取超参数 $\lambda = 2\bar{e} + q$, 假设预测误差序列 $F_n(x_n)$ 以及参考序列 ξ_n 是都有界。如果外界干扰的初始激励误差函数有界, 即如果 $\exists b \in \mathbb{R}_+, \forall x: \|F_0(x)\|_\infty \leq b$, 且由控制器配置的跟踪误差状态方程稳定, 则跟踪误差 e_n 收敛到区间 $\sigma \left[0, \frac{q}{2} + 2\bar{e} + 2\bar{E}_h \right]$, 表达为:

$$\|e_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left[0, \sigma \left(\frac{q}{2} + 2\bar{e} + 2\bar{E}_h \right) \right] \tag{36}$$

其中, $\sigma := \Delta \sum_{i=0}^{\infty} \|M^i\| < \infty$, Δ 表示正的时间增量, $\|\cdot\|$ 表示矩阵的谱范数。 M 表示下述由控制器(22)及自适应律(31)决定的闭环误差状态方程参数矩阵:

$$\dot{e} = M e + \tilde{d}_{TM} \tag{37}$$

根据定理 3.1 的证明, 可以得出矩阵 M 稳定。

证明: 在离散时间系统内对上述定理进行证明。在闭环系统误差收敛性的分析中, 定义不含干扰观测误差的标称系统跟踪误差上界 $\varepsilon > 0$, 希望得到的结论为存在时间步 N , 对于任意 $n > N$,

$$\|e_n\| \leq \varepsilon + \frac{q}{2} + 2\bar{e} + 2\bar{E}_h \tag{38}$$

考虑 $F_n(x_n)$ 的有界性及定理 3.1, 可以得到 $\|e_n\|$ 的有界性, 即存在 $\gamma \in \mathbb{R}_+$ 使得 $\|e_n\| < \gamma$ 。因此, 在 k 个时间步长后, 可以得到

$$\|M^k\| \|e_n\| \leq \|M^k\| \gamma \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \tag{39}$$

由于已证明得到标称控制系统的有界性, 对于预测序列误差, 有

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0: \|F_n(x_n)\| \leq \varepsilon + \frac{q}{2} + 2\bar{e} + 2\bar{E}_h \tag{40}$$

根据文献[15], 可以得到在 k 个时间步长后, 闭环误差还具有下述表达式:

$$\|e_{n+k}\| \leq \|M^k\| \|e_n\| + \Delta Q_{n,n+k} \sum_{i=0}^{k-1} \|M^{k-1-i}\| \tag{41}$$

其中, $Q_{n,n+k} := \max \{ \|F_n(x_n)\|, \dots, \|F_{k+n-1}(x_{k+n-1})\| \}$ 。运用 $\sigma := \Delta \sum_{i=0}^{\infty} \|M^i\| < \infty$ 对上式进行重新配置, 可以得到:

$$\|e_{n+k}\| \leq \|M^k\| \|e_n\| + \sigma Q_{n:n+k} \quad (42)$$

根据式(42), 一定存在一个落在总时间步 N_0 内的时刻 n , 使得

$$\forall k \in N: Q_{n_0:n_0+k} \leq \frac{\varepsilon_1}{\sigma} + \frac{q}{2} + 2\bar{e} + 2\bar{E}_h \quad (43)$$

因此, 总可以找到一个时刻 $n_1 > n_0$, 使得

$$\begin{aligned} \|e_n\| &\leq \varepsilon_2 + \sigma \left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma} + \frac{q}{2} + 2\bar{e} + 2\bar{E}_h \right) \\ &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \sigma \left(\frac{q}{2} + 2\bar{e} + 2\bar{E}_h \right) \\ &= \varepsilon + \sigma \left(\frac{q}{2} + 2\bar{e} + 2\bar{E}_h \right) \end{aligned} \quad (44)$$

由此, 闭环误差可以实现收敛, 即全局状态可以向参考状态实现精确跟踪。 ▽

4 仿真结果与分析

4.1 仿真参数设置

数值仿真验证基于样例无拖曳控制非线性动力学模型^[3]。由于需考察闭环系统各状态响应的性能指标, 部分数值仿真结果展示为频域形式。数值仿真验证了 LACKI 算法对执行器随机噪声的估计效果, 也通过与 QFT 控制方案^[5]的对比验证了该 LACKI-MRAC 方案在两个分别代表平动和转动的敏感轴无拖曳自由度上针对位移噪声抑制的控制效果, 设置仿真时间为 100 s, 步长为 0.1 s。数值仿真结果如图 3-图 5 所示。

在 LACKI 预测器的估计效果验证中, 设置样本点 500 个, 为全局 1000 个采样点中随机取得; $q=0$, 根据该 500 个随机采样点学习如下以成型滤波器表达的执行器噪声:

$$L = K_1 \frac{s+z_1}{s+p_1} + \frac{K_2}{(s+p_2)(s+p_3)(s+p_4)(s+p_5)} \quad (45)$$

其中, 作用于 x_1, θ_1 两敏感坐标轴上的噪声相关参数 $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, z_1, K_1, K_2$ 的取值由文献^[3]给出, 参考模型的状态空间方程按处于零点附近的解耦小扰动线性化模型引入状态反馈增益使闭环零极点稳定后取得。有关动力学模型建立的参数描述如下:

$$\begin{aligned} &\Omega_{DF}^2 = 10^{-7} \\ &\times \begin{bmatrix} 11.19 & 1.35 & 1.35 & 0.00425 & 0 & 0 \\ 1.35 & 9.55 & 1.35 & 0.00425 & 0 & 0 \\ 1.35 & 1.35 & 24.12 & 0.00425 & 0 & 0 \\ 26.087 & 26.087 & 26.087 & 30.64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9.55 & 1.35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.35 & 24.12 \end{bmatrix}, \\ &B_{DF} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

控制器设计中涉及的主要参数列表如表 1 所示:

表 1 仿真参数
Table 1 Simulation parameters

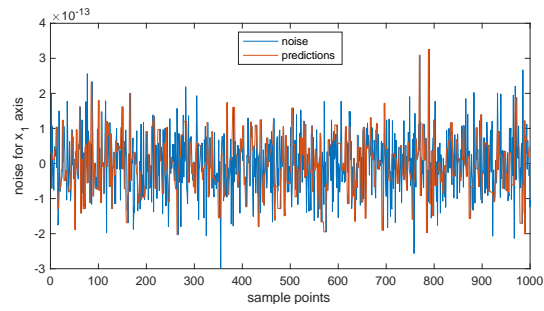
控制方案	参数和取值	
LACKI-MRAC	$\lambda = 0, q = 0$	$D_s = \text{diag}[0.03, 0.23]$
	$\beta = 10^{-12} \times I_2,$	$\Gamma_{\theta_i} = 0.01, \Gamma_{\psi} = 1000$
	$h(s) = \frac{20}{s+20}$	$r = 0$

4.2 仿真结果

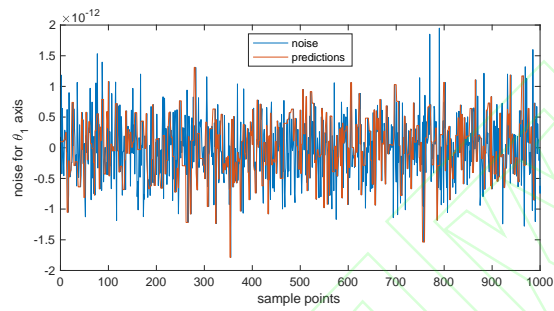
1) LACKI 规则针对不连续随机扰动有较好的预测能力, 图 3 及图 4 显示了在两个敏感轴自由度上针对输入噪声的采样点增量学习及模型预测效果, 仿真结果表明 LACKI 规则针对这种扰动形式仍具有较好的逼近作用, 逼近误差的有界性也能从数值仿真结果中得出。一般基于模型的观测器设计仅能用于逼近连续有界干扰, LACKI 规则作为一种基于增量学习的模型预测手段, 较好的减少了模型估计对模型自身特性的局限, 也更好的适用于实际情况。

2) 基于 LACKI 的扰动观测器相比传统观测器具有更好的扰动估计效果。图 5 展示了基于传统扩张状态观测器^[8]的扰动估计误差与基于 LACKI 的扰动估计误差对比结果, 仿真结果表明, 基于 LACKI 的扰动估计效果优于传统基于模型的扰动观测器。这是由于传统观测器设计难以避免的引入积分环节, 针对非线性复杂扰动的估计存在惯性及相位滞后, 导致观测效果不佳; 而 LACKI 的观测基于样本及增量学习数据, 得以保证系统存在随机过程噪声时, 噪声估计误差的有界性, 并确保了扰动估计性能。

3) 该方案下的闭环系统相比一般的线性鲁棒控制方案具有更强的鲁棒性。MRAC 的主要作用在于实际状态向参考状态的自适应跟踪, 应对复杂非线性扰动时, 其稳定裕度不强, 对控制器参数选取仍比较严格。根据图 6, 在 MRAC 中引入非线性鲁棒项及基于 LACKI 规则的干扰观测器后, 系统鲁棒性得到较大提升, 尤其在应对强非线性或较大幅值扰动时, 系统仍具有保持稳定跟踪的能力, 提高闭环系统的稳定裕度。而传统的鲁棒控制方案对系统本身特性的要求较为严格, 针对无拖曳控制系统中存在的较强非线性耦合及不连续随机干扰, LACKI-MRAC 方案相比 QFT 方案具备更好的向稳定状态自适应逼近的能力, 各通道闭环响应效果在频域得以实现较大的提升。

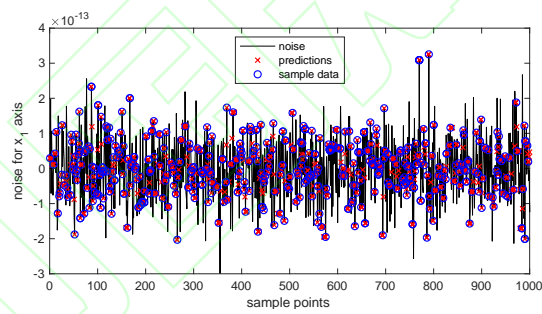


(a) x_1 轴输入噪声估计

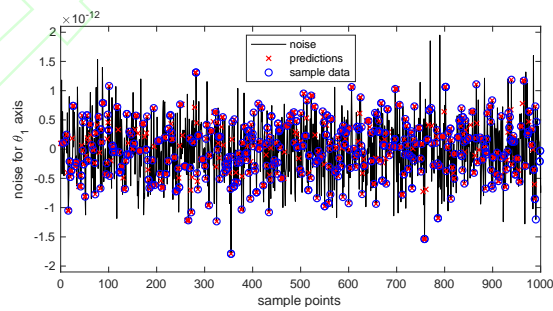


(b) θ_1 轴输入噪声估计

图 3 LACKI 规则下各自由度输入噪声估计
Fig.3 Noise observation each degree of freedom under LACKI rule

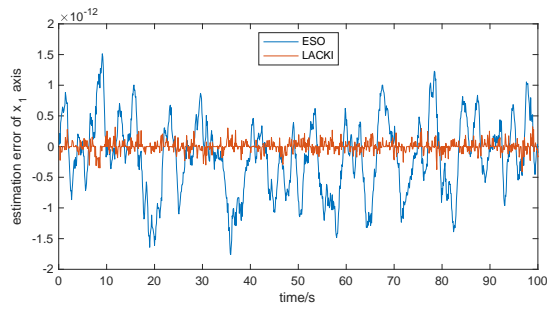


(a) x_1 轴增量学习性能

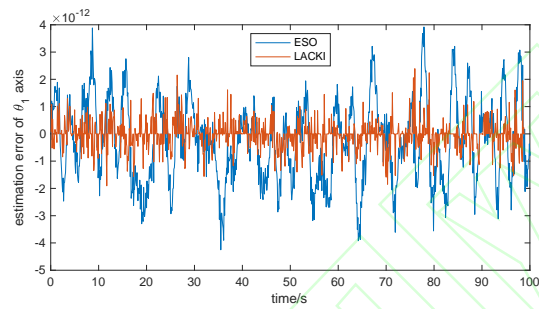


(b) θ_1 轴增量学习性能

图 4 LACKI-MRAC 方案下噪声估计性能
Fig.4 Noise estimation performance of LACKI-MRAC scheme

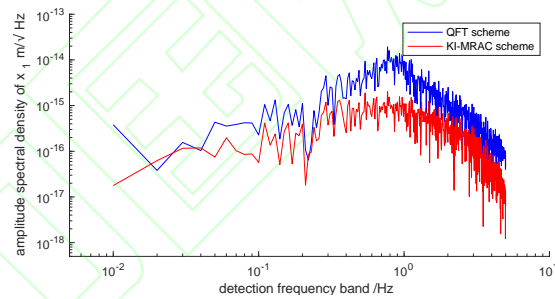


(a) x_1 轴估计误差对比

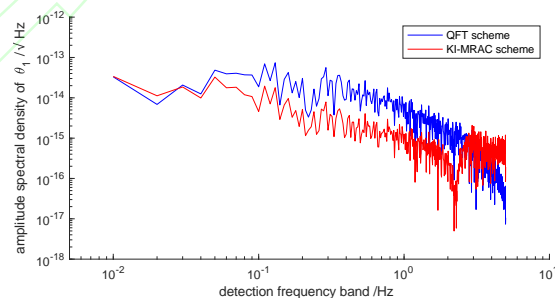


(b) θ_1 轴估计误差对比

图5 不同方案下噪声估计误差对比
Fig.5 Noise estimation error comparison of various schemes



(a) x_1 轴位移响应对比



(b) θ_1 轴位移响应对比

图6 LACKI-MRAC 方案与 QFT 方案位移响应对比
Fig.5 Displacement response comparison of LACKI-MRAC scheme and QFT scheme

5 结论

(1) 本文针对空间引力波探测无拖曳控制设计问题，引入基于输出调节的模型参考自适应控制

(MRAC) 方案, 在系统模型参数未知且仅能获取降维输出信息时, 确保了系统输出及各状态的稳定控制。

(2) 针对复杂非线性随机扰动项的逼近及抑制问题, 本文提出一种基于惰性适配 Lipschitz 常数 Kinky Inference (LACKI) 的监督学习规则用于非线性外界扰动的估计确保了干扰非线性前提下增量学习的估计误差有界性, 并通过 Lyapunov 分析证明了基于 LACKI 的输出调节 MRAC 方案下各闭环信号全局一致渐进稳定及跟踪误差的收敛性, 数值仿真验证了该控制方案的优良控制性能。

为使本文提出的控制方案在空间引力波探测航天器系统平台控制问题中获得更广泛应用, 仍需分析验证该方案在编队飞行控制系统及内部载荷控制系统中的闭环性能。

参考文献 (References)

- [1] W. Fichter, P. Gath, S. Vitale, et al, LISA Pathfinder drag-free control and system implications[J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2005, 22(10): S139.
- [2] F. Mobley, G. Fountain, A. Sadilek, P. Worden and R. Patten, Electromagnetic suspension for the tip-II satellite[J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 11, no. 6, pp. 1712-1716, November 1975.
- [3] S. Wu, D. Fertin, Spacecraft drag-free attitude control system design with quantitative feedback theory[J]. *Acta Astronautica*, 2008, 62(12): 668-682.
- [4] X. Lian, et al, Frequency Separation Control for Drag free Satellite With Frequency Domain Constraints[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. (2021).
- [5] 马浩君, 韩鹏, 高东, 郑建华. 深空双质量块无拖曳卫星 H_∞ 鲁棒控制器设计[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2021, 53(2): 1-13.
- [6] 张锦绣, 董晓光, 曹喜滨. 基于无速度测量的无拖曳卫星自适应控制方法[J]. *宇航学报*, 2014, 35(4): 447-453.
- [7] 胡明, 李洪银, 周泽兵. 无拖曳控制技术及其应用[J]. *载人航天*, 2013, 19(2): 61-69. DOI: 10.16329/j.cnki.zrht.2013.02.010.
- [8] 王玉爽. 无拖曳卫星控制方法研究[D]. 哈尔滨工业大学, 2011.
- [9] X. Wang, J. Long, Q. Zhu and J. Cui, "Drag-free control for cold air thrusters based on variable universe adaptive fuzzy PID," 2014 IEEE International Conference on Information and Automation (ICIA), 2014, pp. 159-163, doi: 10.1109/ICInfA.2014.6932645.
- [10] 付海清, 吴树范, 刘梅林, 孙笑云. 基于干扰观测器的空间惯性传感器自适应控制[J/OL]. *北京航空航天大学学报*: 1-12 [2022-07-16]. DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2021.0734.
- [11] F. Huijin, Z. Xuan, W. Yongji and X. Li, Adaptive failure compensation control for LEO drag-free satellite with actuator failures and disturbances[J]. *2016 Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, 2016, pp. 1651-1656, doi: 10.1109/CCDC.2016.7531248.
- [12] Z. Xuan, F. Huijin and W. Wei, "An adaptive compensation control scheme for LEO drag-free satellite under actuator failure," 2016 35th Chinese Control Conference (CCC), 2016, pp. 813-818, doi: 10.1109/ChiCC.2016.7553185.
- [13] W. Fichter, P. Gath, S. Vitale, et al. LISA Pathfinder drag-free control and system implications[J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2005, 22(10): S139.
- [14] J. Guo, G. Tao, Y. Liu, A multivariable MRAC scheme with application to a nonlinear aircraft model[J]. *Automatica*, 2011, 47(4): 804-812.
- [15] J. Calliess, S. Robert, C. Rasmussen, et al, Lazily adapted constant kinky inference for nonparametric regression and model-reference adaptive control[J]. *Automatica*, 2020, 122: 109216.
- [16] J. Calliess, Conservative decision-making and inference in uncertain dynamical systems[D]. University of Oxford, 2014.
- [17] J. Calliess, Lipschitz optimisation for Lipschitz interpolation[C]// 2017 American Control Conference (ACC). IEEE, 2017: 3141-3146.
- [18] P. McNamara, et al, Lisa Pathfinder[J]. *Classical and quantum gravity*. v25.11 (2008): 114034.
- [19] S. Wu, et al, Attitude Stabilization of LISA Pathfinder Spacecraft Using Colloidal Micro-Newton Thrusters[C]// AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. 2011.
- [20] S. Wu, et al, Attitude Control of LISA Pathfinder Spacecraft with Micro-Newton FEOP Thrusters under Multiple Failures[C]//AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference., 2010.